Kuliah Fisika Dasar Teknik Sipil 2007

GETARAN DAN GELOMBANG

Mirza Satriawan

Physics Dept.
Gadjah Mada University
Bulaksumur, Yogyakarta
email: mirza@ugm.ac.id

GETARAN

Getaran adalah salah satu bentuk gerak yang khusus. Kita hanya akan meninjau getaran atau osilasi yang sederhana. Untuk itu kita akan meninjau energi potensial yang dimiliki sebuah partikel bermassa m yang berada dalam keadaan kesetimbangan stabil di sekitar titik 0. Secara umum bentuk energi potensialnya adalah

$$U = U_0 - ax^2 + O(x^3) \tag{1}$$

dengan $O(x^3)$ adalah suku-suku energi potensial dengan variabel x berpangkat tiga atau lebih, yang tentunya harus sangat kecil dibandingkan suku pangkat duanya (bila tidak maka bukan kesetimbangan stabil). Gaya yang terkait dengan energi potensial ini dapat dicari dari

$$F_x \mathrm{d}x = -\mathrm{d}U \tag{2}$$

atau

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = -2ax + O(x^2) \tag{3}$$

bila suku gaya pangkat dua atau lebih sangat kecil atau dapat diabaikan, maka ini tidak lain dari gaya pegas, dan dengan $2a = k$ maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \tag{4}$$

atau

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0 \tag{5}$$

Persamaan ini memiliki bentuk penyelesaian umum

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{6}$$

dengan

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7}$$

adalah frekuensi sudut dari getaran. Persamaan di (6) dapat dituliskan juga sebagai

$$x(t) = A_0 \sin(\omega t + \phi) = A_0(\sin \omega t \cos \phi + \cos \omega t \sin \phi) \qquad (8)$$

dengan $A = A_0 \cos \phi$ dan $B = A_0 \sin \phi$, (sehingga $\phi = \arcsin B/A$ yang disebut sebagai fase getaran), dan A_0 disebut sebagai amplitudo getaran. Getaran yang memenuhi persamaan (5) disebut sebagai getaran selaras sederhana.

Berikut ini beberapa contoh getaran selaras sederhana

Bandul

Sebuah bandul yang berada dalam medan potensial gravitasi, bila disimpangkan tidak jauh dari titik keseimbangannya akan mengalami gerak getaran. Lihat gambar di bawah ini

Komponen gaya yang dialami bandul bermassa m yang sejajar dengan

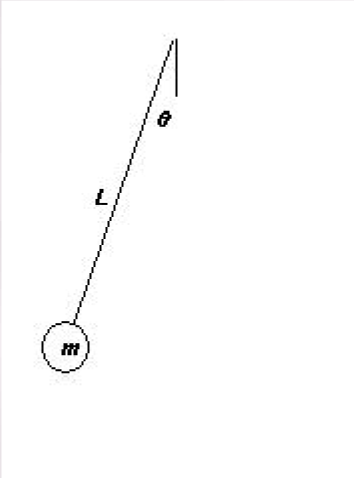

Figure 1: Bandul

arah geraknya adalah

$$F = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - mg\sin\theta \tag{9}$$

Tanda negatif karena arah gaya berlawanan dengan arah simpangan positif x. Untuk simpangan yang tidak terlalu besar, $\sin\theta$ dapat kita dekati sebagai $\sin\theta \approx \theta$ (dalam radian) dan $x \approx L\theta$ sehingga

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \tag{10}$$

yang merupakan persamaan getaran selaras sederhana dengan frekuensi

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{11}$$

Bandul Mekanis

Sebuah benda digantung pada titik P dan memiliki momen inersia terhadap sumbu P sebesar I_P.

Benda ini disimpangkan dari titik seimbangnya dan kemudian bergetar. Torka yang dialami benda tadi, akibat gaya gravitasi yang bekerja pada titik pusatnya dapat dituliskan sebagai

$$\tau = I_P\alpha = I_P\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -MgL\sin\theta \tag{12}$$

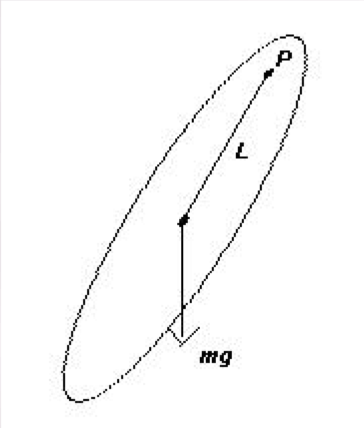

Figure 2: Bandul mekanik

Untuk sudut yang cukup kecil $\sin\theta \approx \theta$ sehingga

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{MgL}{I_P}\theta = 0 \tag{13}$$

Penyelesaian persamaan ini adalah suatu getaran selaras sederhana dengan frekuensi sudut

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I_P}} \tag{14}$$

Getaran Teredam dan Resonansi

Dalam kenyataan di alam, selain gaya yang menimbulkan getaran juga terdapat gaya yang menghambat gerak getaran. Sehingga semua gerak getaran akhirnya berkurang energinya dan berhenti bergetar. Sebagai model sederhana kita asumsikan getaran teredam dengan gaya redaman yang sebanding dengan kecepatan benda, sehingga persamaan gerak benda dapat ditulis sebagai

$$F = -kx - bv \tag{15}$$

atau

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{16}$$

Penyelesaian persamaan di atas ini dapat dituliskan sebagai berikut

$$x = Ae^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi) \tag{17}$$

dengan

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \tag{18}$$

Bentuk grafik getarannya sebagai berikut

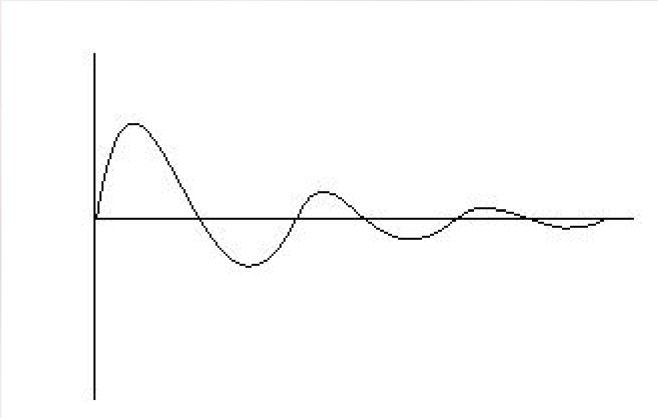

Figure 3: Getaran teredam

Resonansi

Terkadang suatu sistem yang dapat bergetar mendapat gaya yang juga periodik. Dalam kasus ini benda akan bergetar dengan amplitudo yang besar ketika frekuensi alaminya sama dengan frekuensi gaya eksternal periodiknya. Sebagai model misalkan gaya eksternal periodiknya diberikan oleh $F = F_r \cos\omega'' t$, sehingga persamaan geraknya (dengan mengikutsertakan faktor redaman)

$$F = -kx - bv + F_r \cos\omega'' t \tag{19}$$

atau

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = F_r \cos\omega'' t \tag{20}$$

Dari persamaan di atas, tentunya logis bila getarannya harus memiliki frekuensi yang sama dengan frekuensi getaran gaya eksternal periodik ω'', tetapi mungkin terdapat beda fase. Dapat ditunjukkan bahwa penyelesaian persamaan di atas adalah

$$x = \frac{F_r}{G}\sin(\omega'' t + \phi) \tag{21}$$

dengan

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2} \tag{22}$$

dan

$$\phi = \arccos \frac{b\omega''}{G} \tag{23}$$

Tampak bahwa nilai G akan minimum dan amplitudo akan maksimum ketika $\omega = \omega''$. Peristiwa inilah yang biasa disebut resonansi.

Energi Getaran

Energi potensial sebuah sistem pegas diberikan oleh

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \tag{24}$$

sedangkan energi kinetiknya diberikan oleh

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \tag{25}$$

maka dengan

$$x = A\sin(\omega t + \phi) \tag{26}$$

dan

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\omega\cos(\omega t + \phi) \tag{27}$$

maka energi total mekanik sistem pegas yang bergetar diberikan oleh

$$E = E_k + U = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2 \tag{28}$$

GELOMBANG

Gelombang adalah getaran yang merambat. Jadi di setiap titik yang dilalui gelombang terjadi getaran, dan getaran tersebut berubah fasenya sehingga tampak sebagai getaran yang merambat. Terkait dengan arah getar dan arah rambatnya, gelombang dibagi menjadi dua kelompok, geklombang transversal dan gelombang longitudinal. Gelombang transversal arah rambatnya tegak lurus dengan arah getarannya, sedangkan gelombang longitudinal arah rambatnya searah dengan arah getarannya.

Persamaan gelombang memenuhi bentuk

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{29}$$

Bentuk umum penyelesaian persamaan di atas adalah semua fungsi yang berbentuk $x(z, t) = x(z \pm vt)$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan mudah. Bentuk yang cukup sederhana yang menggambarkan gelombang sinusoidal adalah penyelesaian yang berbentuk

$$x(z,t) = A\sin(kz \pm \omega t + \phi) \tag{30}$$

Untuk suatu waktu t tertentu (misalkan $t = 0$, dan pilih $\phi = 0$) maka

$$x(z,t) = A\sin(kz) \tag{31}$$

Ini adalah persamaan sinusoidal dengan jarak dari satu fase ke fase berikutnya diberikan oleh

$$z \equiv \lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{32}$$

atau berarti

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{33}$$

Bilangan k ini menunjukkan jumlah gelombang atau bilangan gelombang per 2π satuan panjang.

Untuk suatu posisi tertentu (misalkan $z = 0$, dan pilih $\phi = 0$) maka

$$x(z,t) = -A\sin(\omega t) \tag{34}$$

Ini adalah persamaan getaran sinusoidal di suatu titik. Periode getarnya diberikan oleh

$$t \equiv T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{35}$$

atau berarti

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \tag{36}$$

dengan f adalah frekuensi gelombang.

Untuk suatu fase tertentu dari gelombang, pola gelombang tersebut akan tetap selama nilai $kx - \omega t$ tetap. Sehingga dengan berjalannya waktu, nilai kz juga harus bertambah. Ini berarti pola gelombang akan merambat ke kanan dengan kecepatan yang diberikan oleh

$$\frac{k\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \omega \tag{37}$$

atau

$$v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} \tag{38}$$

Superposisi Gelombang

Dua buah gelombang dapat dijumlahkan atau disuperposisikan. Ada beberapa kasus yang akan kita tinjau. Kasus dua gelombang dengan ω, k sama tetapi berbeda fasenya. Kasus dua gelombang dengan ω, k sama tetapi arah geraknya berlawanan. Kasus dua gelombang dengan ω dan $k$nya berbeda sedikit.

Beda fase

Misalkan kita punya

$$x_1 = A\sin(kz - \omega t + \phi_1) \tag{39}$$

$$x_2 = A\sin(kz - \omega t + \phi_2) \tag{40}$$

Penjumlahan kedua gelombang ini menghasilkan

$$x_{tot} = x_1 + x_2 = 2A\sin(kz - \omega t + \bar{\phi})\cos(\delta\phi) \tag{41}$$

dengan $\bar{\phi} = (\phi_1 + \phi_2)/2$ dan $\delta\phi = (\phi_1 - \phi_2)/2$

Beda arah kecepatan

Misalkan kita punya

$$x_1 = A\sin(kz - \omega t) \tag{42}$$

$$x_2 = A\sin(kz + \omega t) \tag{43}$$

Penjumlahan kedua gelombang ini menghasilkan

$$x_{tot} = x_1 + x_2 = 2A\sin(kz)\cos(\omega t) \tag{44}$$

Fenomena ini sering disebut sebagai gelombang tegak

Beda frekeunsi dan panjang gelombang

Misalkan kita punya

$$x_1 = A\sin(k_1 z - \omega_1 t) \tag{45}$$

$$x_2 = A\sin(k_2 z - \omega_2 t) \tag{46}$$

Penjumlahan kedua gelombang ini menghasilkan

$$x_{tot} = x_1 + x_2 = 2A\sin(\bar{k}z - \bar{\omega}t + \bar{\phi})\cos(\delta kz - \delta\omega t) \tag{47}$$

dengan $\bar{k} = (k_1 + k_2)/2$, $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ dan $\delta k = (k_1 - k_2)/2$, $\delta\omega = (\phi_1 - \phi_2)/2$

Ketika bedanya sangat kecil maka muncul fenomena yang disebut sebagai layangan.