FISIKA DASAR (TEKNIK SISPIL)

BENDA TEGAR

Mirza Satriawan

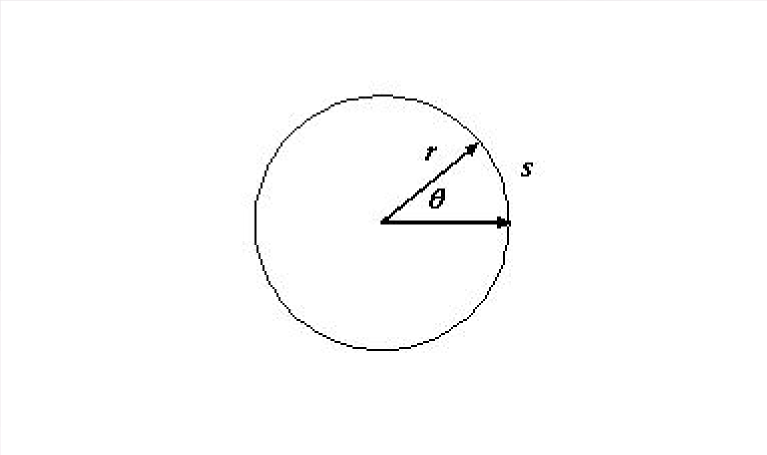
Physics Dept.
Gadjah Mada University
Bulaksumur, Yogyakarta
email: mirza@ugm.ac.id

Rotasi Benda Tegar

Benda tegar adalah sistem partikel yang mana posisi relatif partikel-partikelnya, satu dengan yang lainnya di dalam sistem, (dianggap) tetap. Akibatnya ketika benda ini berotasi terhadap suatu sumbu tetap, maka jarak setiap partikel dalam sistem terhadap sumbu rotasi akan selalu tetap. Di sini kita hanya akan meninjau gerak rotasi dengan sumbu putar yang tetap orientasinya.

Sudut dan jarak

Tinjau rotasi sebuah partikel dalam lintasan lingkaran dengan jejari r.



Jarak yang telah ditempuh dalam selang waktu Δt adalah s terkait dengan sudut θ (dalam radian). Hubungan s dan θ diberikan oleh $s = r\theta$. Untuk selang waktu yang sangat kecil maka besar kecepatan linier diberikan oleh

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

Kecepatan sudut

Besaran $\omega \equiv \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \equiv$ disebut sebagai kecepatan sudut, yang arahnya diberikan oleh arah putar tangan kanan, tegak lurus bidang lingkaran. Jadi hubungan antara kecepatan linier dengan kecepatan sudut diberikan oleh

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \tag{2}$$

Percepatan sudut

Percepatan sudut α didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan sudut terhadap waktu,

$$\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{3}$$

Hubungan antara percepatan linier dan percepatan sudut diberikan oleh

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\alpha \tag{4}$$

dengan arah α diberikan oleh arah perubahan ω, atau secara vektor

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times r. \tag{5}$$

Kinematika rotasi

Karena persamaan-persamaan kinematika yang menghubungkan θ, ω dan α bentuknya sama dengan persamaan-persamaan kinematika gerak linear, maka dengan memakai analogi ini akan diperoleh kaitan sebagai berikut untuk keceptan sudut konstan

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t \tag{6}$$

dan kaitan-kaitan berikut untuk percepatan sudut konstan

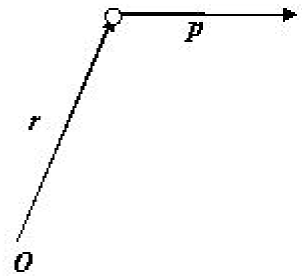
$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 && (7)\\ \omega(t) &= \omega_0 + \alpha t && (8)\\ \omega(t)^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha\theta. && (9) \end{aligned}$$

Momentum sudut

Untuk memudahkan penyelidikan dan analisa terhadap gerak rotasi, didefinisikan beberapa besaran sebagai analog konsep gaya dan momentum. Pertama didefinisikan konsep momentum sudut l. Momentum sudut suatu partikel yang memiliki momentum linear $\vec{p}$ dan berada pada posisi $\vec{r}$ dari suatu titik referensi O adalah

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{10}$$

Perlu diperhatikan bahwa nilai l bergantung pada pemilihan titik referensi O, nilainya dapat berubah bila digunakan titik referensi yang berbeda.



p
r
O

Torka

Laju perubahan momentum sudut terhadap waktu didefinisikan sebagai besaran torka $\vec{\tau}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{11}$$

karena bentuk

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0 \tag{12}$$

maka

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t}. \tag{13}$$

Sistem partikel (rotasi)

Untuk suatu sistem banyak partikel total momentum sudutnya diberikan oleh

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i \tag{14}$$

dengan $\vec{l}_i$ adalah momentum sudut partikel ke-i. Total torka yang bekerja pada sistem ini

$$\vec{\tau}_{\mathrm{tot}} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{l}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \tau_i \tag{15}$$

Torka internal dan eksternal

Torka yang bekerja pada sistem dapat dikelompokkan menjadi dua jenis, torka internal yang bekerja pada partikel oleh partikel lain dalam sistem, dan torka eksternal yang berasal dari gaya eksternal. Karena prinsip aksi-reaksi, dan bila garis kerja gaya aksi-reaksi tersebut segaris maka total torka antara dua partikel i dan j

$$\tau_{ij} + \tau_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times F_{ij} = 0. \tag{16}$$

Kekekalan momentum sudut

Sehingga total torka yang bekerja pada sistem partikel hanyalah torka eksternal, dan perubahan momentum sudut total sistem hanya bergantung pada torka eksternal

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\tau}_{\mathrm{ekst\ tot}} \tag{17}$$

Ketika tidak ada torka eksternal maka momentum sudut total sistem akan konstan.

Energi Kinetik Rotasi

Kita tinjau suatu sistem partikel yang berotasi terhadap suatu sumbu tetap. Jarak setiap partikel terhadapa sumbu rotasi selalu tetap. Bila sistem partikel ini adalah benda tegar maka kesemua partikel akan bergerak bersama-sama dengan kecepatan sudut yang sama. Energi kinetik sistem partikel tersebut adalah

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \Big(\frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2\Big)\omega^2 \tag{18}$$

Besaran yang ada dalam tanda kurung didefinisikan sebagai momen inersia I dari sistem relatif terhadap sumbu rotasi

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{19}$$

Bila bendanya kontinum, maka perumusan momen inersianya menjadi

$$I = \int r_{\perp}^{2} \mathrm{d}m \tag{20}$$

dengan $r_{\perp}$ adalah jarak tegak lurus elemen massa $\mathrm{d}m$ ke sumbu putar.

Teorema sumbu sejajar

Tinjau sebuah benda seperti tampak pada gambar di bawah ini dengan titik pm adalah titik pusat massanya. Momen inersia benda terhadap sumbu di titik P dan momen inersia terhadap sumbu yang sejajar tetapi melalui titik pusat massanya terkait sebagai berikut

$$I_P = \int r_\perp^2 \mathrm{d}m = \int \vec{r}_\perp \cdot \vec{r}_\perp \mathrm{d}m \tag{21}$$

tetapi $\vec{r}_\perp = \vec{r}_{\mathrm{pm}} + \vec{r}\,'$ dan

$$\vec{r}_\perp \cdot \vec{r}_\perp = (\vec{r}_{\mathrm{pm}} + \vec{r}\,') \cdot (\vec{r}_{\mathrm{pm}} + \vec{r}\,') = r_{\mathrm{pm}}^2 + r'^2 + 2\vec{r}_{\mathrm{pm}} \cdot \vec{r}\,'$$

sehingga

$$I_P = \int (r_{\mathrm{pm}}^2 + r'^2 + 2\vec{r}_{\mathrm{pm}} \cdot \vec{r}\,') \mathrm{d}m \tag{22}$$

suku pertama tidak lain adalah Mr_{pm}^2 (M adalah massa total benda), suku kedua adalah momen inersia terhadap pusat massa, sedangkan suku ketiga lenyap (karena tidak lain adalah posisi pusat massa ditinjau dari pusat massa). Sehingga

$$I_P = I_{\mathrm{pm}} + Mr_{\mathrm{pm}}^2 \tag{23}$$

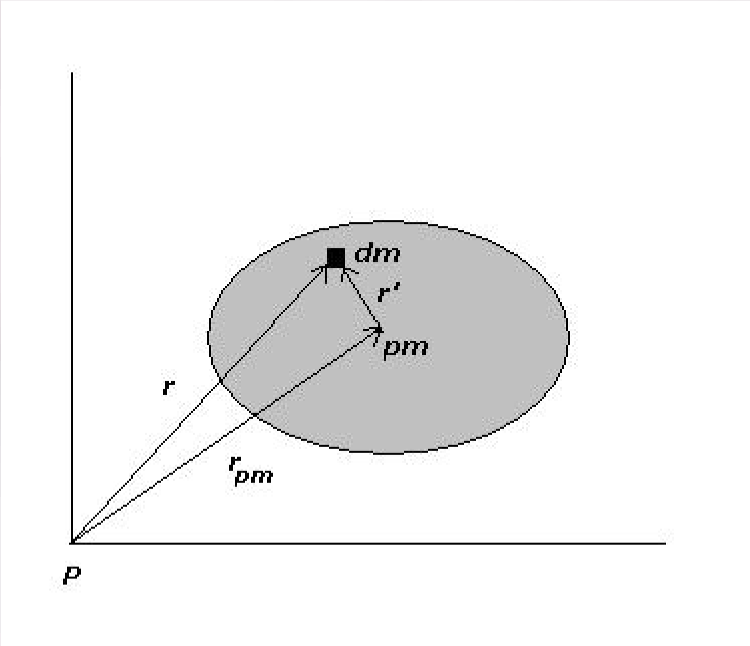


Figure 1: Gambar untuk teorema sumbu sejajar

menu

Teorema sumbu tegak lurus

Tinjau benda pada gambar di bawah ini

Kita ketahui bahwa

$$I_z = \int r_\perp^2 \mathrm{d}m = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = I_y + I_x \tag{24}$$

Jadi momen inersia terhadap suatu sumbu sama dengan jumlah momen inersia terhadap dua sumbu yang saling tegak terhadapnya

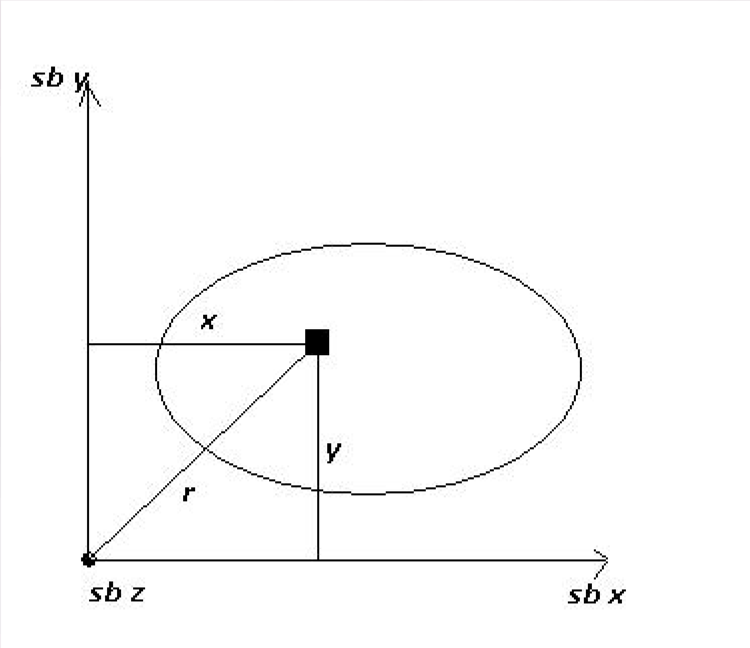


Figure 2: Gambar untuk teorema sumbu tegak lurus

Usaha

Definisi usaha untuk gerak rotasi sama dengan definisi usaha pada gerak linear. Sebuah partikel diberi gaya $\vec{F}$. Partikel itu bergerak melingkar dengan lintasan yang berjejari r, menempuh lintasan sepanjang $\mathrm{d}\vec{s}$. Usaha yang dilakukan gaya $\vec{F}$ tadi adalah

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{25}$$

Tetapi kita dapat menuliskan $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r}$, sehingga

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r} = \vec{r} \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta} = \vec{\tau} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta} \tag{26}$$

Tetapi usaha yang dilakukan sama dengan perubahan energi kinetik sehingga

$$\vec{\tau} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta} = \mathrm{d}(\frac{1}{2}I\omega^2) = I\omega\mathrm{d}\omega \tag{27}$$

menu

dengan $\mathrm{d}\omega = \alpha \mathrm{d}t$ dan $\mathrm{d}\theta = \omega \mathrm{d}t$ maka

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\omega}\mathrm{d}t = I\vec{\omega} \cdot \vec{\alpha}\mathrm{d}t \tag{28}$$

Maka kita peroleh kaitan

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} \tag{29}$$

analog dengan hukum Newton kedua.

Gabungan Gerak Translasi dan Rotasi

Tinjau sebuah benda dengan posisi pusat massa $\vec{r}_{\rm pm}$ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}_{\rm pm}$. Misalkan benda ini selain bertranslasi, juga berotasi. Kecepatan suatu bagian dari benda tadi dapat dituliskan sebagai $\vec{v} = \vec{v}_{\rm pm} + \vec{v}'$, dengan $\vec{v}'$ adalah kecepatan relatif terhadap pusat massa. Sehingga energi kinetik benda tadi

$$E_k = \frac{1}{2}\int v^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int (\vec{v}_{\rm pm} + \vec{v}') \cdot (\vec{v}_{\rm pm} + \vec{v}')\mathrm{d}m \qquad (30)$$

atau dapat dituliskan

$$\frac{1}{2}\int (v_{\rm pm}^2 + \vec{v}'^2 + 2\vec{v}_{\rm pm} \cdot \vec{v}')\mathrm{d}m \qquad (31)$$

suku terakhir lenyap (karena merupakan kecepatan pusat massa dilihat dari kerangka pusat massa). Sehingga

$$E_k = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{pm}}^2 + E'_{k\mathrm{pm}} \tag{32}$$

dengan $E'_{k\mathrm{pm}}$ adalah energi kinetik benda karena gerak relatifnya terhadap pusat massa. Bila bendanya benda tegar, maka suku terakhir ini adalah energi kinetik rotasi terhadap pusat massa

$$E_k = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{pm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\mathrm{pm}} \omega^2 \tag{33}$$

Kesetimbangan Benda Tegar

Sebuah benda tegar berada dalam keadaan seimbang mekanis bila, relatif terhadap suatu kerangka acuan inersial

1. Percepatan linier pusat massanya nol.
2. Percepatan sudutnya mengelilingi sembarang sumbu tetap dalam kerangka acuan ini juga nol.

Perhatian!

Persyaratan di atas tidak mengharuskan benda tersebut dalam keadaan diam, karena persyaratan pertama membolehkan benda bergerak dengan kecepatan pusat massanya konstan, sedangkan persyaratan kedua membolehkan benda berotasi dengan kecepatan sudut rotasi yang konstan juga. Bila benda benar-benar diam (relatif terhadap suatu kerangka acuan), yaitu ketika kecepatan linier pusat massanya dan kecepatan sudut rotasinya terhadap sembarang sumbu tetap, bernilai nol keduanya, maka benda tegar tersebut dikatakan berada dalam keseimbangan statik. Bila suatu benda tegar berada dalam keadaan seimbang statik, maka kedua persyaratan di atas untuk keseimbangan mekanik akan menjamin benda tetap dalam keadaan seimbang statik.

Syarat Kesetimbangan

Persyaratan pertama ekuivalen dengan persyaratan bahwa total gaya eksternal yang bekerja pada benda tegar sama dengan nol

$$\vec{F}_{\text{eks}} = 0. \tag{34}$$

Sedangkan persyaratan kedua ekuivalen dengan persyaratan bahwa total torka eksternal yang bekerja pada benda tegar sama dengan nol

$$\vec{\tau}_{\text{eks}} = 0. \tag{35}$$

Jenis-Jenis Keseimbangan

Dalam kasus ini yang akan ditinjau hanyalah keseimbangan benda tegar di dalam pengaruh gaya eksternal yang konservatif. Karena gayanya adalah gaya konservatif, maka terdapat hubungan antara gaya yang bekerja dengan energi potensialnya, misalnya untuk satu arah-x

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{36}$$

Energi potensial

Keadaan seimbang terjadi ketika nilai $F_x = 0$, kondisi ini tidak lain adalah syarat titik ekstrem untuk fungsi energi potensial $U(x)$. Andaikan saja titik seimbang ini kita pilih sebagai posisi $x = 0$. Fungsi energi potensial dapat diekspansikan (sebagai deret pangkat dalam x) di sekitar titik ini

$$U(x) = U_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \tag{37}$$

Karena

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0 \tag{38}$$

maka $a_1 = 0$. Gaya yang bekerja pada benda ketika digeser dari titik keseimbangannya, tergantung pada nilai a_2,

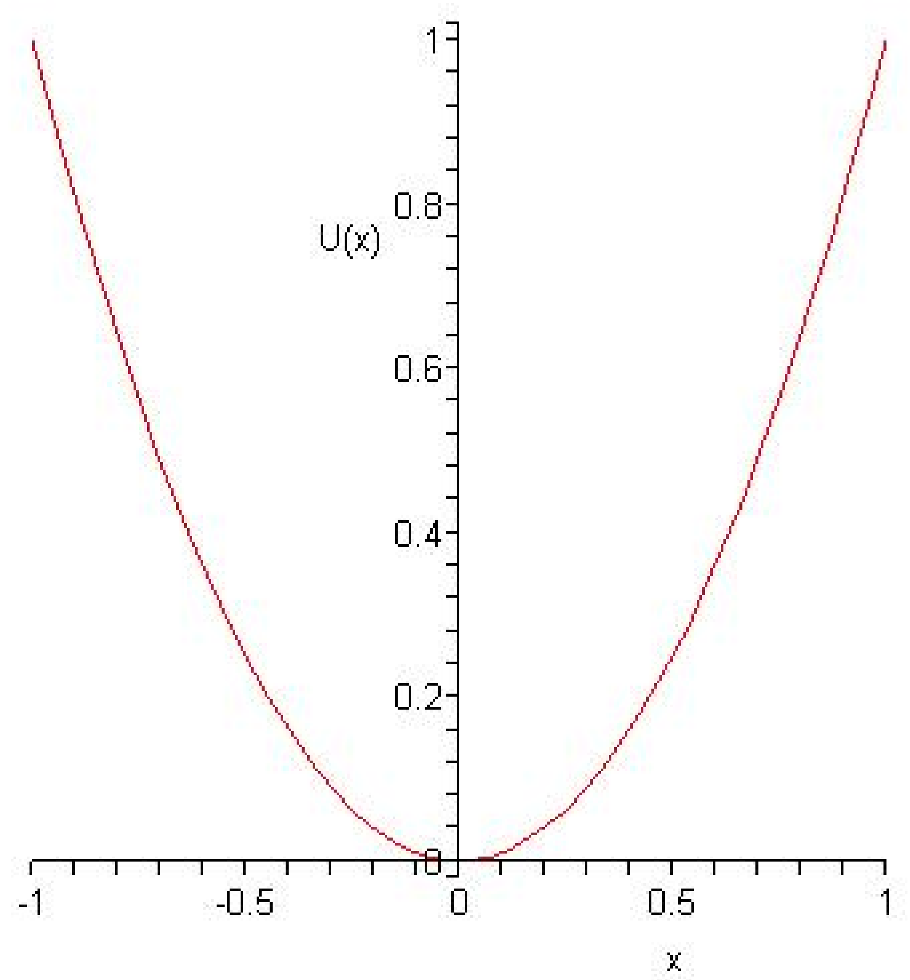
$$F_x = -2a_2 x - 3a_3 x^2 + \dots \tag{39}$$

Untuk nilai x disekitar $x = 0$, F_x dapat didekati hanya dengan suku pertamanya, sehingga

$$F_x \approx -2a_2x \tag{40}$$

Stabil

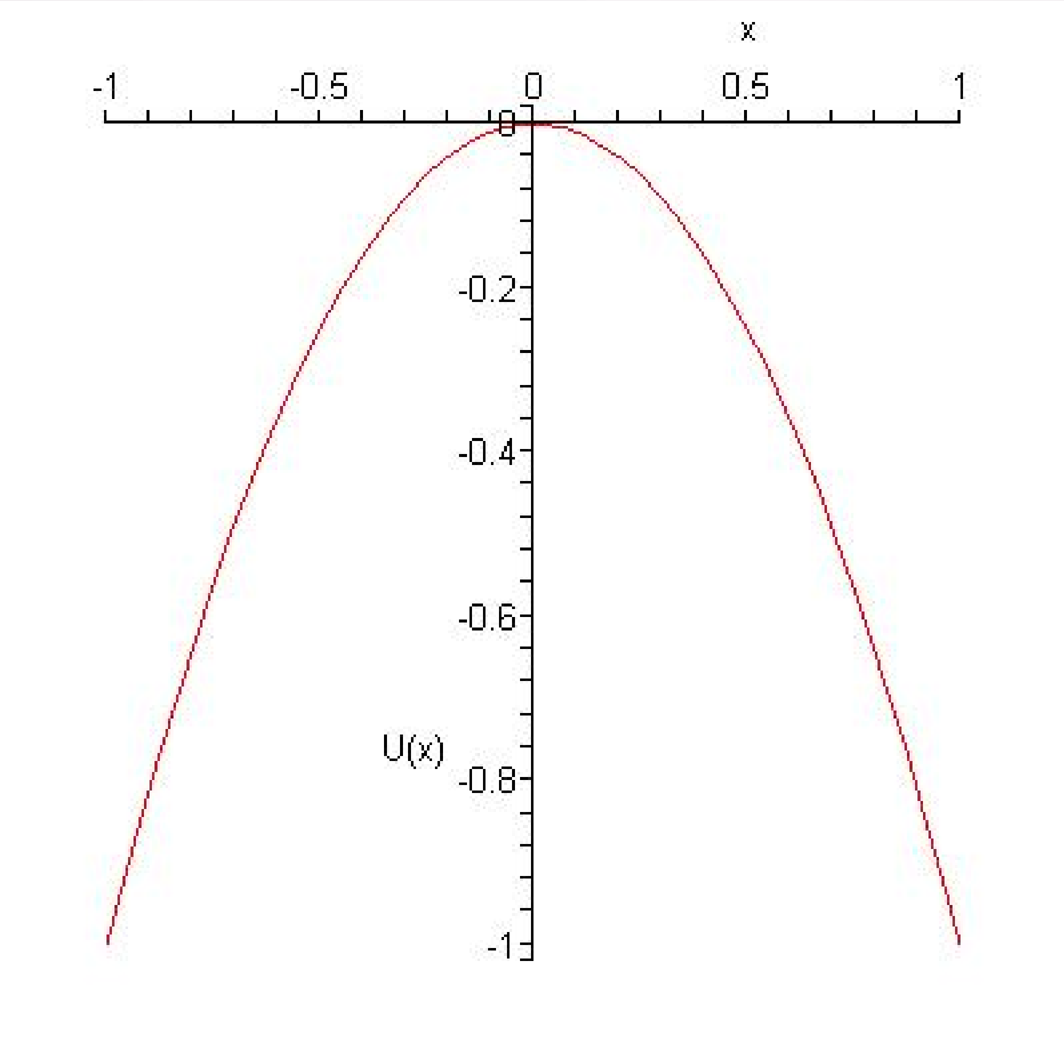
Bila $a_2 > 0$ maka pergeseran kecil dari titik seimbang, memunculkan gaya yang mengarahkan kembali ke titik seimbang. Keseimbangan ini disebut keseimbangan stabil.



U(x)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-1
-0.5
0
0.5
1
x

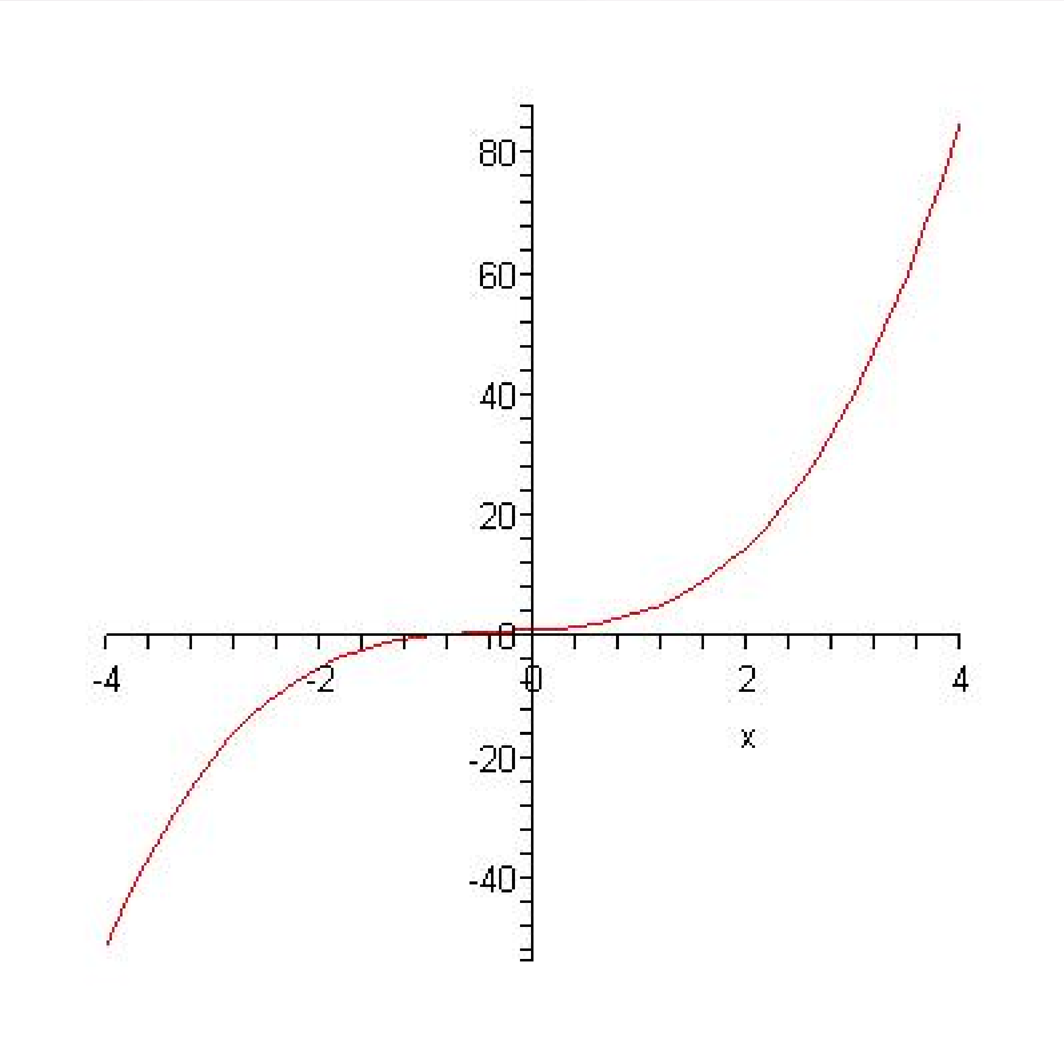
Labil

Bila $a_2 > 0$ maka pergeseran sedikit dari titik seimbang, memunculkan gaya yang menjauhkan dari titik seimbangnya. Keseimbangan ini disebut keseimbangan labil.


x
-1
-0.5
0
0.5
1
0
-0.2
-0.4
-0.6
U(x)
-0.8
-1

Netral

Bila $a_2 = 0$ maka pergeseran sedikit dari titik seimbang tidak memunculkan gaya. Keseimbangan ini disebut keseimbangan netral.


80
60
40
20
0
-20
-40
-4
-2
0
2
4
x