FISIKA DASAR (TEKNIK SISPIL)

MOMENTUM - TUMBUKAN (+GRAVITASI)

Mirza Satriawan

Physics Dept.
Gadjah Mada University
Bulaksumur, Yogyakarta
email: mirza@ugm.ac.id

Sistem Partikel

Dalam pembahasan-pembahasan sebelumnya kita hanya meninjau sebuah partikel atau sebuah benda yang diperlakukan sebagai partikel titik. Dalam bagian ini kita akan meninjau kasus yang lebih umum, dengan sistem ataupun benda yang terdiri dari banyak partikel (titik partikel) maupun benda yang terdiri dari partikel-partikel yang dianggap tersebar secara kontinyu pada benda.

Pusat Massa

Posisi pusat massa sebuah sistem banyak partikel didefinisikan sebagai berikut

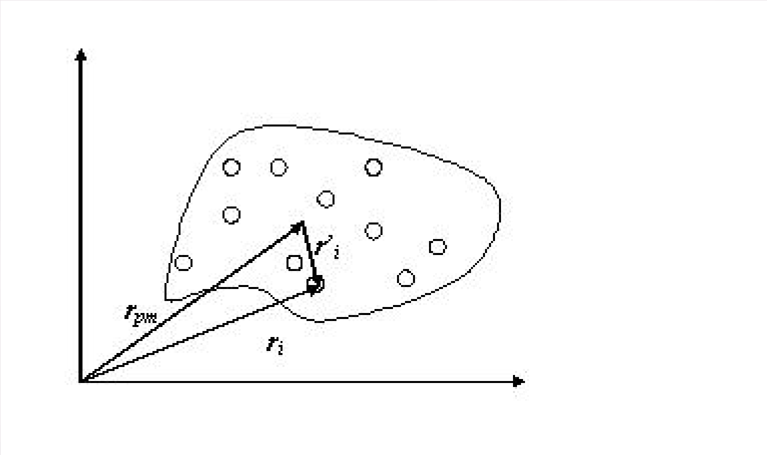
$$\vec{r}_{\mathrm{pm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \tag{1}$$

dengan $\vec{r}_i$ adalah posisi partikel ke-i di dalam sistem, dan

$$M = \sum_i m_i \tag{2}$$

Dengan mengganti $\vec{r}_i = \vec{r}_{\mathrm{pm}} + \vec{r}_i'$, di mana $\vec{r}_i'$ adalah posisi partikel ke-i relatif terhadap pusat massa, maka pers. (1) menjadi

$$\vec{r}_{\mathrm{pm}} = \frac{\sum_i m_i(\vec{r}_{\mathrm{pm}} + \vec{r}_i')}{M} = \vec{r}_{\mathrm{pm}} + \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i'}{M} \tag{3}$$



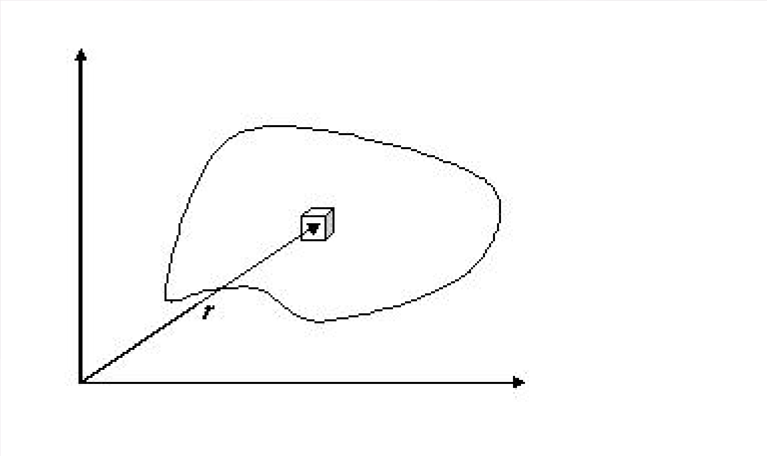
sehingga dapat disimpulkan

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0 \tag{4}$$

Bila bendanya bersifat kontinyu, maka pers. (1) menjadi

$$\vec{r}_{\mathrm{pm}} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \mathrm{d}m \tag{5}$$

dengan $\mathrm{d}m$ adalah elemen massa pada posisi $\vec{r}$.


r

Gerak Pusat Massa

Gerak pusat massa diperoleh melalui definisi pusat massa di pers. (1). Kecepatan pusat massa diperoleh dari derivatif pers. (1)

$$\vec{v}_{\mathrm{pm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M} \tag{6}$$

Dari persamaan ini, setelah dikalikan dengan M, diperoleh

$$M\vec{v}_{\mathrm{pm}} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i \tag{7}$$

Besaran $M\vec{v}_{\mathrm{pm}}$ didefinisikan sebagai momentum pusat massa, tidak lain adalah total momentum sistem.

Dengan menderivatifkan pers. (7) terhadap waktu, diperoleh

$$M\vec{a}_{\mathrm{pm}} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i \tag{8}$$

dengan $\vec{F}_i$ adalah total gaya yang bekerja pada partikel ke-i. Gerak pusat massa ditentukan oleh total gaya yang bekerja pada sistem.

Gaya eksternal dan internal

Gaya yang bekerja pada sistem dapat dikelompokkan menjadi dua jenis, gaya internal yaitu gaya antar partikel di dalam sistem, dan gaya eksternal yaitu gaya yang berasal dari luar sistem.

Gaya internal

Untuk gaya internal, antara sembarang dua partikel dalam sistem, i dan j misalnya, akan ada gaya pada i oleh j dan sebaliknya (karena aksi-reaksi), tetapi

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij} = 0$$

Sehingga jumlah total gaya internal pada sistem akan lenyap, dan

$$M\vec{a}_{\mathrm{pm}} = \sum_i \vec{F}_{i\mathrm{eks}} = \vec{F}_{\mathrm{eks}} \tag{9}$$

Jadi gerak pusat massa sistem hanya ditentukan oleh total gaya eksternal.

Ketika tidak ada gaya eksternal yang bekerja pada suatu sistem, maka

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{p}_i = 0 \tag{10}$$

Atau berarti total momentum seluruh partikel dalam sistem, konstan,

$$\sum_i \vec{p}_i = \text{konstan}. \tag{11}$$

Tumbukan

Dalam proses tumbukan antara dua benda, gaya yang terlibat, ketika kedua benda dilihat sebagai satu kesatuan, hanya gaya internal. Sehingga pada semua proses tumbukan, selama tidak ada gaya eksternal, total momentum sistem konstan. Untuk memudahkan kita cukup meninjau tumbukan dalam satu dimensi. Untuk kasus dua dan tiga dimensi, karena sifat vektorial dari momentum, hasilnya dapat diperoleh sebagai jumlahan vektor kasus satu dimensi

Ditinjau tumbukan antara partikel 1 dan 2, dengan massa m_1 dan m_2, dan besar kecepatan awal v_1 dan v_2. Walau kita sudah mengetahui dari pembahasan bagian sebelumnya bahwa momentum total sistem kekal, tetapi di sini kita akan menjabarkannya lagi dengan meninjau gaya tumbukannya secara langsung. Ketika tumbukan terjadi, partikel 1 memberi gaya ke partikel 2 sebesar $\vec{F}_{21}$, dan partikel 2 memberi gaya ke partikel 1 sebesar $\vec{F}_{12}$. Dari hukum Newton kedua,

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

sehingga

$$\Delta\vec{p}_1 = \int \vec{F}_{12}\,\mathrm{d}t \tag{13}$$

Besaran integral di ruas kiri persamaan di atas juga disebut sebagai impuls yang diberikan oleh gaya $\vec{F}_{12}$. Untuk partikel kedua berlaku

$$\Delta\vec{p}_2 = \int \vec{F}_{21}\ \mathrm{d}t = -\int \vec{F}_{12}\ \mathrm{d}t \tag{14}$$

sehingga bila pers. (13) dan (14) dijumlah, didapatkan

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_0 = \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \tag{15}$$

atau berarti

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_1 v_2' \tag{16}$$

Dapat disusun ulang sebagai

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \tag{17}$$

Tumbukan Elastik

Kita akan meninjau terlebih dulu kasus ekstrim, yaitu tumbukan elastik, di mana tidak ada energi sistem yang hilang (sebagai panas maupun bunyi), dan tumbukan total tak elastik, di mana kedua partikel atau benda menempel dan bergerak bersama-sama.

Dalam tumbukan elastik, energi sistem sebelum dan sesudah tumbukan, tetap sama

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_1 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^{2'} + \frac{1}{2}m_1 v_2^{2'} \tag{18}$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan sebagai

$$m_1(v_1^2 - v_1^{2'}) = m_2(v_2^{2'} - v_2^2) \tag{19}$$

Dengan membagi persamaan ini, dengan pers. (17), diperoleh

$$(v_1 + v_1') = (v_2' + v_2) \tag{20}$$

atau

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} = 1 \tag{21}$$

Koefisien e disebut koefisien resistusi, dan untuk kasus tumbukan elastik nilai $e = 1$.

Tumbukan tak elastik

Tumbukan tak elastik adalah tumbukan yang mana setelah tumbukan kedua benda menyatu dan bergerak dengan kecepatan sama, sehingga $v_1' = v_2'$. Ini berarti pada tumbukan total tak elastik, nilai $e = 0$. Untuk sembarang tumbukan tak elastik, nilai e adalah antara kedua kasus tadi, yaitu $0 \leq e \leq 1$.

Untuk kasus tumbukan umum, dengan koefisien restitusi e

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \tag{22}$$

atau

$$v_2' - v_1' = e(v_1 - v_2) \tag{23}$$

Dengan memakai pers. (23) dan (17), diperoleh

$$v_1' = \frac{(m_1 - em_2)v_1 + (1+e)m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{24}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - em_1)v_2 + (1+e)m_1 v_1}{m_1 + m_2} \tag{25}$$

Kasus-kasus khusus, misalnya tumbukan antara dua benda dengan salah satunya memiliki massa yang sangat besar. Dari pers. (24) benda yang bermassa besar praktis tidak berubah keadaan geraknya, sedangkan benda yang bermassa kecil akan berbalik arah.

Copernicus

Hukum gravitasi universal yang dirumuskan oleh Newton, diawali dengan beberapa pemahaman dan pengamatan empiris yang telah dilakukan oleh ilmuwan-ilmuwan sebelumnya. Mula-mula Copernicus memberikan landasan pola berfikir yang tepat tentang pergerakan planet-planet, yang semula dikira planet-planet tersebut bergerak mengelilingi bumi, seperti pada konsep Ptolemeus. Copernicus meletakkan matahari sebagai pusat pergerakan planet-planet, termasuk bumi, dalam gerak melingkarnya.

Kepler

Kemudian dari data hasil pengamatan yang teliti tentang pergerakan planet, yang telah dilakukan Tycho Brahe, Kepler merumuskan tiga hukum empiris yang dikenal sebagai hukum Kepler mengenai gerak planet:

1. Semua planet bergerak dalam lintasan berbentuk elips dengan matahari pada salah satu titik fokusnya.
2. Garis yang menghubungkan planet dengan matahari akan menyapu daerah luasan yang sama dalam waktu yang sama.
3. Kuadrat perioda planet mengelilingi matahari sebanding dengan pangkat tiga jarak rerata planet ke matahari.

Perhatian!!

Hukum-hukum Kepler ini adalah hukum empiris. Keplet tidak mempunyai penjelasan tentang apa yang mendasari hukum-hukumnya ini. Kelebihan Newton, adalah dia tidak hanya dapat menjelaskan apa yang mendasari hukum-hukum Kepler ini, tetapi juga menunjukkan bahwa hukum yang sama juga berlaku secara universal untuk semua benda-benda bermassa.

Hukum Gravitasi Universal

Kita dapat menjabarkan, dengan cara yang sederhana, hukum gravitasi universal dengan memulainya dari fakta-fakta empiris yang telah ditemuka Kepler. Untuk memudahkan analisa kita anggap bahwa planet-planet bergerak dalam lintasan yang berbentuk lingkaran dengan jejari r, dengan kelajuan konstan v.

Karena planet bergerak dalam lintasan lingkaran maka planet mengalami percepatan sentripetal yang besarnya diberikan oleh

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{rT^2} \tag{26}$$

dengan T adalah periode planet mengelilingi matahari. Percepatan ini tentunya disebabkan oleh suatu gaya yang mengarah ke pusat lingkaran (ke matahari). Besar gaya ini tentunya sama dengan massa planet m dikali percepatan sentripetalnya, sehingga besar gaya tadi dapat dirumuskan sebagai

$$F = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \tag{27}$$

Hukum Kepler ketiga dapat kita tuliskan sebagai

$$T^2 = kr^3 \tag{28}$$

dengan k adalah suatu konstanta kesebandinga. Dengan ini, besar gaya pada (27) menjadi

$$F = m\frac{4\pi^2}{kr^2} = k'\frac{m}{r^2} \tag{29}$$

dengan k' konstanta. Karena gaya ini mengarah ke pusat lingkaran, yaitu ke matahari, tentunya logis bila dianggap bahwa gaya tersebut disebabkan oleh matahari.

Berdasarkan hukum ketiga Newton, ada gaya yang bekerja pada matahari oleh planet, yang besarnya sama. Tetapi karena sekarang bekerja pada matahari, tentunya konstanta k' di pers. (29) mengandung massa matahari M sehingga logis bila diasumsikan bahwa terdapat gaya yang saling tarik menarik antara planet dan matahari yang besarnya diberikan oleh

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{30}$$

Newton, setelah mengamati hal yang sama pada bulan dan pada benda-benda yang jatuh bebas di permukaan bumi, menyimpulkan bahwa gaya tarik menarik tadi berlaku secara universal untuk sembarang benda. Gaya tadi kemudian dinamai sebagai gaya gravitasi. Jadi antara dua benda bermassa m_1 dan m_2 yang terpisah sejauh r terdapat gaya gravitasi yang perumusannya diberikan oleh

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12} \tag{31}$$

dengan $\hat{r}_{12}$ adalah vektor satuan yang berarah dari benda pertama ke benda kedua. (Notasi 12, berarti pada benda pertama oleh benda kedua).

Konstanta G

Konstanta G dalam persamaan gravitasi universal, dapat ditentukan melalui eksperimen. Pengukuran yang teliti untuk nilai G dilakukan oleh Cavendish. Sekarang nilai konstanta gravitasi universal diberikan oleh

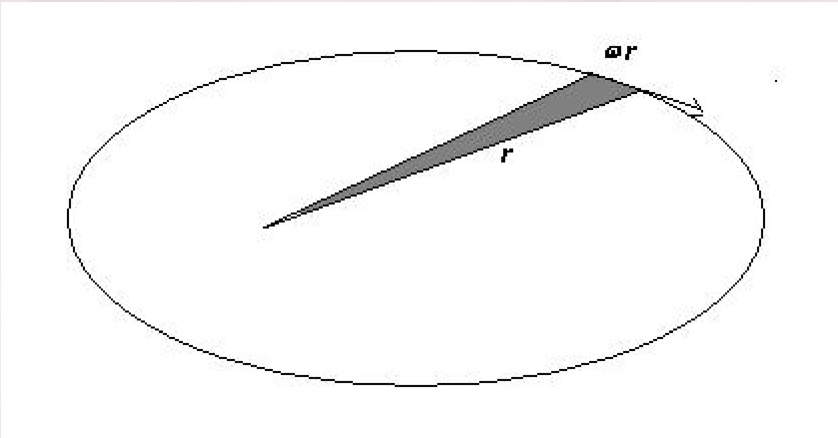
$$G = 6,6720 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2 \tag{32}$$

Benda besar

Dalam penjabaran di atas, diasumsikan bahwa benda pertama dan kedua adalah suatu titik massa. Untuk benda yang besar, yang tidak dapat dianggap sebagai titik massa maka sumbangan dari masing-masing elemen massa harus diperhitungkan. Untuk itu diperlukan perhitungan-perhitungan kalkulus integral. Salah satu hasil capaian Newton, dia berhasil menunjukkan, dengan bantuan kalkulus integral, bahwa sebuah benda berbentuk bola (juga kulit bola) dengan distribusi massa yang homogen, akan memberikan gaya gravitasi ada sebuah titik massa di luar bola tadi dengan massa bola seolah-olah terkonsentrasi pada titik pusat bola. Dengan ini kita dapat misalnya menganggap gaya gravitasi bumi seolah-olah disebabkan oleh sebuah titik massa yang berada pada pusat bumi.

Kekekalan Momentum Sudut

Hukum Kepler kedua, untuk lintasan planet berbentuk lingkaran, hanya menunjukkan kelajuan planet mengelilingi matahari konstan. Tetapi bila berbentuk elips, hukum kedua Kepler menunjukkan kekekalan momentum sudut. Lihat gambar



menu

Daerah yang disapu oleh garis yang menghubungkan planet dengan matahari dalam suatu selang waktu Δt diberikan oleh

$$\Delta A = \frac{1}{2} r^2 \omega \Delta t \tag{33}$$

sehingga pernyataan bahwa untuk selang waktu yang sama daerah yang disapu sama, sama dengan menyatakan bahwa besaran berikut ini konstan

$$\frac{\omega^2}{r} \tag{34}$$

Tetapi bila ini kita kalikan dengan massa planet, akan kita dapatkan bahwa besaran $m\omega r^2$ yang tidak lain sama dengan besar total momentum sudut sistem (dengan matahari sebagai titik referensi). Jadi dalam sistem planet matahari, gaya gravitasi tidak menimbulkan perubahan momentum sudut.

Medan Gravitasi

Konsep gaya gravitasi, dimana dua benda yang terpisah dan tidak saling sentuh dapat memeberikan pengaruh satu sama lain, merupakan konsep yang sulit dipahami bagi ilmuwan fisika klasik dahulu. Bagi mereka semua gaya harus melalui persentuhan, minimal harus ada perataranya. Karena itu terkait dengan gaya gravitasi, mereka memperkenalkan konsep medan gravitasi. Jadi pada ruang di sekitar sebuah benda yang bermassa m akan timbul medan gravitasi. Apabila pada medan gravitasi tadi terdapat sebuah benda yang bermassa, maka benda tadi akan mengalami gaya gravitasi.

Kuat medan gravitasi pada suatu titik dalam ruang diukur dengan menggunakan suatu massa uji yang kecil. Kuat medan gravitas diberikan oleh perumusan

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{35}$$

sehingga medan gravitasi di sekitar sebuah benda bermassa m diberikan oleh

$$\vec{g} = G\frac{m}{r^2}\hat{r} \tag{36}$$

Energi Potensial Gravitasi

Usaha yang dilakukan oleh gaya gravitasi sebuah benda bermassa M (yang diasumsikan berada di titik pusat koordinat) pada benda lain yang bermassa m, yang menyebabkan perpindahan benda kedua dari jarak r_a ke r_b diberikan oleh

$$W = \int_a^b -G\frac{mM}{r^2}\hat{r} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_a^b G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r = GMm\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) \quad (37)$$

Tanda minus dalam gaya di atas karena arah gayanya adalah ke pusat koordinat.

Jelas dari hasil di atas bahwa gaya gravitasi adalah gaya konservatif. Karena itu kita dapat mendefinisikan konsep energi potensial gravitasi melalui

$$\Delta U = -W = -GMm\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) \tag{38}$$

Bila kita asumsikan r_a berada pada jauh tak hingga, dan $r_b = r$, dan diasumsikan pada titik jauh tak hingga potensial gravitasinya lenyap (=nol), maka kita dapatkan

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{39}$$

Dekat bumi

Untuk suatu ketiggian dekat permukaan bumi, maka kita pilih pada pers. (38) $r_a = R$, jejari bumi (= jarak permukaan bumi dari pusatnya), dan $r_b = R + h$. Kemudian diasumsikan bahwa $U(R) = 0$, maka kita peroleh energi potensial gravitasinya

$$U(r) = -GMm\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = -GMm\left(\frac{R-(R+h)}{(R+h)R}\right) \approx \frac{GM}{R^2}mh \tag{40}$$

Tetapi besaran GM/R^2 tidak lain dari percepatan gravitasi bumi g, sehingga untuk ketingggian dekat permukaan bumi

$$U(h) = mgh \tag{41}$$