FISIKA DASAR (TEKNIK SIPIL)

KINEMATIKA

Mirza Satriawan

Physics Dept.
Gadjah Mada University
Bulaksumur, Yogyakarta
email: mirza@ugm.ac.id

Definisi KINEMATIKA

Kinematika adalah cabang ilmu fisika yang mempelajari gerak titik partikel secara geometris, yaitu meninjau gerak partikel tanpa meninjau penyebab geraknya.

Kinematika adalah cabang dari ilmu mekanika, yaitu ilmu yang mempelajari gerak benda.

PERHATIAN

Walaupun kita hanya meninjau gerak titik partikel, tetapi dapat dimanfaatkan juga untuk mempelajari gerak benda maupun sistem yang bukan titik. Karena selama pengaruh penyebab gerak partikel hanya pengaruh eksternal, maka gerak keseluruhan benda dapat diwakili oleh gerak titik pusat massanya. Pembuktian terhadap pernyataan ini akan diberikan belakangan.

Keadaan Gerak Benda

Keadaan gerak suatu titik partikel dideskripsikan oleh perubahan posisi partikel sebagai fungsi waktu, $\vec{r}(t)$.

PERHATIAN

Dalam mekanika klasik waktu dianggap tidak bergantung pada sistem kerangka koordinat yang dipilih, waktu hanya sebagai sesuatu yang mengalir sendiri bebas dari besaran-besaran fisis lainnya.

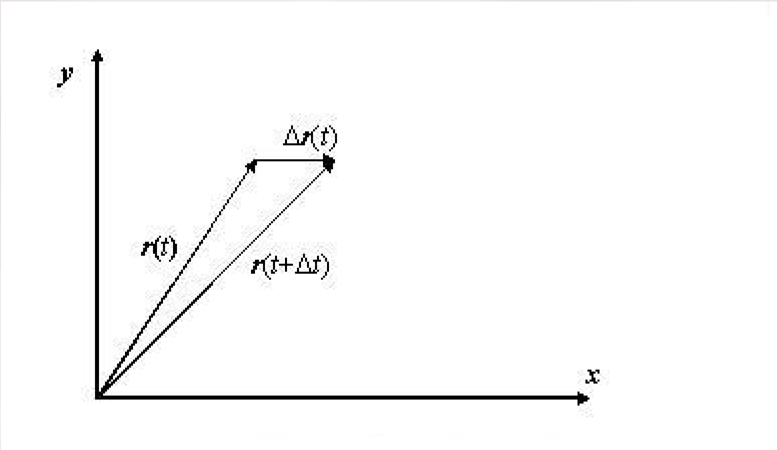
Keadaan gerak diketahui

Bila fungsi $\vec{r}(t)$ sudah diketahui untuk sebarang waktu t, maka keadaan gerak partikel tadi secara praktis sudah diketahui.

Tetapi terkadang informasi tentang gerak partikel tidak diketahui dalam bentuk posisi tetapi dalam besaran-besaran lain yang nanti akan kita definisikan berikutnya.

Kecepatan

Misalkan dalam selang waktu Δt, posisi partikel akan berpindah dari $\vec{r}(t)$ menjadi $\vec{r}(t + \Delta t)$. Vektor perubahan posisinya adalah



$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Kecepatan sebuah partikel adalah laju perubahan posisi partikel terhadap waktu.

Kecepatan rerata partikel tadi dalam selang waktu Δt didefinisikan sebagai

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Sedangkan kecepatan sesaat pada saat t didefinisikan sebagai

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

Kelajuan

Besar dari vektor kecepatan sering juga disebut sebagai kelajuan. Kelajuan dari sebuah partikel dapat tidak berubah walaupun kecepatannya berubah, yaitu bila vektor kecepatan berubah arahnya tanpa berubah besarnya.

Percepatan

Bila kecepatan sebuah partikel pada saat t adalah $\vec{v}(t)$ maka setelah selang waktu Δt kecepatannya adalah $\vec{v}(t+\Delta t)$. Perubahan kecepatannya selama selang Δt diberikan oleh

$$\Delta v = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

Percepatan sebuah partikel adalah laju perubahan keceatan partikel terhadap waktu. Percepatan rerata partikel tadi didefinisikan sebagai

$$\bar{\vec{a}} \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

sedangkan percepatan sesaatnya pada saat t didefinisikan sebagai

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

Karena kecepatan dapat dituliskan sebagai derivatif posisi terhadap waktu, maka percepatan adalah derivatif kedua posisi terhadap waktu, yaitu

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Gerak dengan kecepatan konstan

Bila kecepatan partikel konstan $\vec{v}$, maka percepatannya nol. Untuk kasus ini posisi partikel pada waktu t dapat diketahui melalui integrasi persamaan berikut ini

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\mathrm{d}t$$

yang bila diintegralkan dari saat awal t_0 dengan posisi $\vec{r}(0)$ ke saat akhir t dengan posisi $\vec{r}(t)$

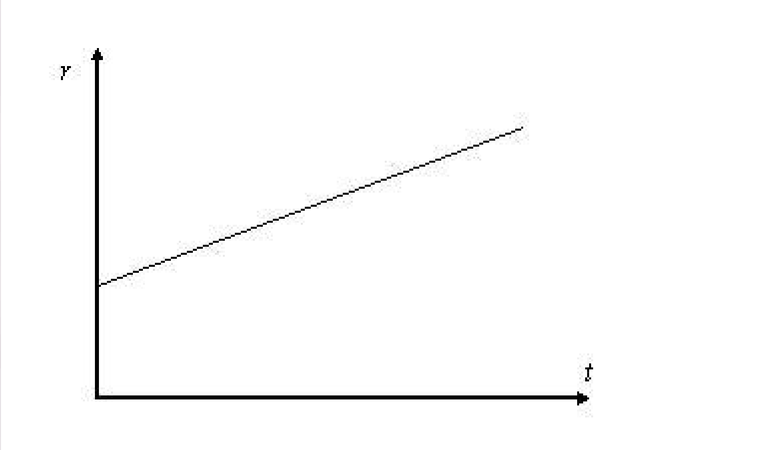
$$\int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} \mathrm{d}\vec{r} = \vec{v} \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \vec{v}(t - 0)$$

atau

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}\, t$$

Grafik hubungan posisi dan waktu membentuk garis lurus dengan nilai gradien grafik (kemiringan grafik) sama dengan nilai kecepatan yang konstan



Gerak dengan percepatan konstan

Bila percepatan partikel konstan $\vec{a}$, kecepatan partikel dapat ditentukan dari integrasi persamaan berikut ini

$$\mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\mathrm{d}t$$

yang bila diintegralkan dari saat awal t_0 dengan kecepatan $\vec{v}(0)$ ke saat akhir t dengan kecepatan $\vec{v}(t)$

$$\int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} \mathrm{d}\vec{v} = \vec{a}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \vec{a}(t-0)$$

atau

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{a}\ t$$

dari persamaan ini, dengan memakai definisi kecepatan sebagai derivatif posisi terhadap waktu, diperoleh persamaan berikut ini

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}(0)\mathrm{d}t + \vec{a}(t-0)\mathrm{d}t$$

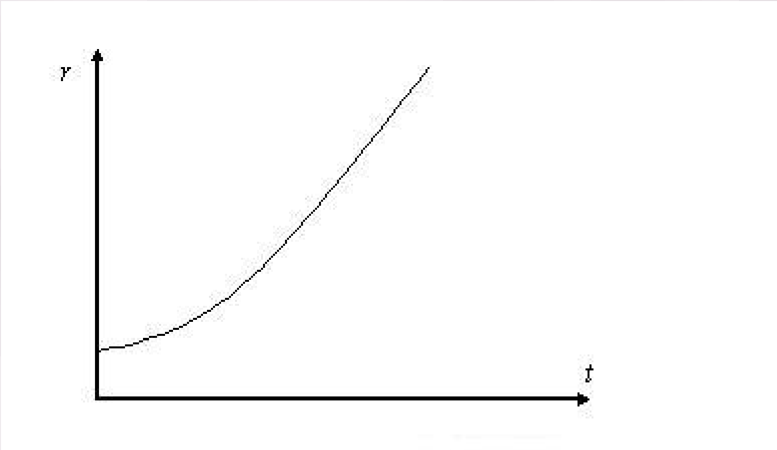
yang bila diintegralkan dari saat awal t_0 dengan posisi $\vec{r}(0)$ ke saat akhir t dengan posisi $\vec{r}(t)$, diperoleh

$$\int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(0)\mathrm{d}t + \vec{a}(t-0)\mathrm{d}t$$

dan diperoleh

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)\ t + \frac{1}{2}\vec{a}\ t^2$$

Grafik posisi sebagai fungsi dari waktu berbentuk grafik kuadratis (parabolik), dengan gradien grafik sama dengan besar kecepatan partikel pada saat tertentu. Sedangkan grafik kecepatan sebagai fungsi waktu berbentuk garis lurus dengan gradien grafiknya sama dengan besar percepatan partikel.


r
t

Perumusan Lain

Dengan meninjau gerak satu dimensi, dapat juga dituliskan

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

atau dapat dituliskan

$$v\,\mathrm{d}v = a\mathrm{d}r$$

yang bila diintegralkan dari posisi dan kecepatan awal $r(0)$ dan $v(0)$ ke posisi dan kecepatan akhir $r(t)$ dan $v(t)$ maka diperoleh

$$\int_{v(0)}^{v(t)} v\,\mathrm{d}v = a\int_{r(0)}^{r(t)} \mathrm{d}r.$$

Hasilnya

$$v(t)^2 = v(0)^2 + 2a\,(r(t) - r(0))$$

Gerak Jatuh Bebas

Sebagai contoh gerak dengan percepatan konstan adalah gerak partikel jatuh bebas di dekat permukaan bumi. Dapat ditunjukkan bahwa untuk ketinggian yang tidak terlalu jauh dari permukaan bumi, percepatan gravitasi g yang dialami sebuah benda yang jatuh bebas, bernilai konstan. Dalam kasus benda jatuh bebas, bila arah positif dipilih ke arah atas, maka percepatan benda $a = -g$ (ke bawah).

Kombinasi gerak

Besaran-besaran gerak yang berupa besaran vektor dapat diuraikan menjadi komponen-komponennya dalam setiap arah vektor-vektor basisnya. Sehingga gerak dalam dua dimensi dapat diuraikan menjadi kombinasi dua gerak satu dimensi dalam dua arah yang saling tegak lurus (misalnya dalam arah x dan y). Demikian juga gerak dalam tiga dimensi dapat diuraikan menjadi kombinasi tiga gerak satu dimensi dalam tiga arah yang saling tegak lurus (dalam arah x, y, dan z). Semua persamaan-persamaan kinematika gerak lurus dalam bab sebelumnya, dapat digunakan untuk mendeskripsikan gerak dalam masing-masing arah.

Gerak Peluru

Sebagai contoh akan diberikan gerak partikel dalam dua dimensi (bidang) yang mengalami percepatan konstan dalam arah vertikal dan tidak mengalami percepatan dalam arah horizontal. Aplikasi dari gerak ini adalah gerak peluru, yang lintasannya berupa lintasan parabolik.

Misalkan di titik asal koordinat $(0, 0)$ sebuah partikel bergerak dengan kecepatan awal $\vec{v}_0$ yang membentuk sudut θ terhadap sumbu x. Partikel ini mengalami percepatan gravitasi sebesar $-g$ (ke arah sumbu y negatif). Kecepatan awal partikel dapat diuraikan menjadi komponen x dan y, yaitu $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ dan $v_{0y} = v_0 \sin\theta$. Gerak partikel sekarang dapat dianalisa sebagai gerak dengan kecepatan konstan pada arah x dan gerak dengan percepatan konstan pada arah y. Sesuai pembahasan pada bagian sebelum ini, posisi partikel pada arah x dan y diberikan oleh

$$x(t) = v_{0x}t \tag{1}$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

Kecepatan partikel pada arah x tetap, yaitu $v_x(t) = v_{0x}$, sedangkan kecepatan partikel pada arah y berubah sebagai $v_y(t) = v_{0y} - gt$. Besar kecepatan partikel diberikan oleh

$$v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$

Dengan mensubstitusikan variabel waktu t pada pers. (1) ke dalam pers. (2) diperoleh

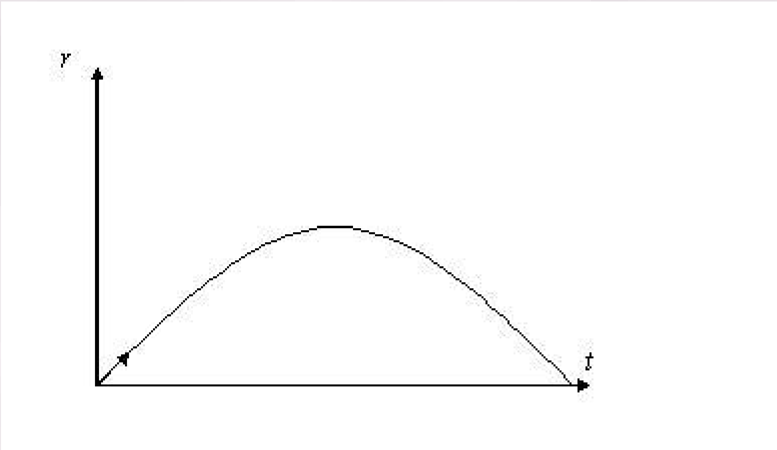
$$y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 \tag{3}$$

Persamaan ini adalah fungsi y yang kuadratis dalam variabel x. Titik tertinggi lintasan diperoleh dengan mencari nilai ekstrim fungsi tersebut, yang tercapai ketika

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dx}} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2}x = 0$$

yaitu pada

$$x = \frac{v_{0y}v_{0x}}{g} = \frac{2v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$$



Posisi terjauh partikel, yaitu posisi ketika partikel kembali memiliki posisi $y = 0$, dapat diperoleh dengan mencari akar pers. (3), (dengan memakai rumus abc)

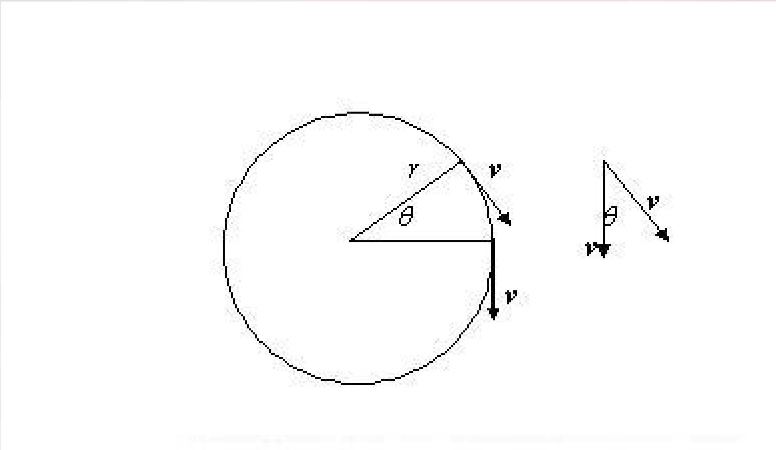
$$x = \frac{v_{0y}v_{0x}}{g} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4v_{0y}^2 v_{0x}^2}{g^2}}$$

terdapat dua nilai, dan dipilih yang tidak nol (karena $x = 0$ tidak lain adalah titik awal gerak partikel yang juga memiliki koordinat $y = 0$), jadi titik terjauh yang ditempuh adalah pada

$$x = \frac{2v_{0y}v_{0x}}{g} = \frac{v_0 \sin 2\theta}{g} \tag{4}$$

Gerak melingkar beraturan

Gerak melingkar beraturan adalah gerak dengan lintasan berbentuk lingkaran dan kelajuan konstan. Walau kelajuannya konstan, tetapi vektor kecepatannya berubah, yaitu berubah arahnya. Kita tinjau suau partikel bergerak melingkar dengan jejari lintasan lingkarannya r. Lihat gambar di bawah ini



Dari gambar di atas, untuk selang waktu Δt, partikel yang bergerak melingkar telah menempuh jarak sejauh

$$v\Delta t = r\theta \tag{5}$$

dengan θ adalah sudut dalam satuan radian. Dalam selang waktu tersebut, karena vektor kecepatan selalu tegak lurus terhadap jejari lingkaran, arah vektor kecepatan juga sudah berubah sebesar $\Delta\vec{v}$ (lihat gambar),

Sehingga untuk selang waktu yang cukup kecil,

$$\Delta v = \theta v. \tag{6}$$

Dengan mengeliminasi θ dari pers. (5) dan (6), diperoleh

$$\Delta v = v^2 \frac{\Delta t}{r} \tag{7}$$

atau, dengan membagi kedua ruas dengan Δt, akan didapatkan percepatan

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}. \tag{8}$$

Arah percepatannya searah dengan arah perubahan kecepatan $\Delta\vec{v}$, untuk Δt yang sangat kecil, akan tegak lurus terhadap arah kecepatan $\vec{v}$ mengarah ke pusat lingkaran. Percepatan ini disebut sebagai percepatan sentripetal, dengan besar yang konstan dan selalu mengarah ke pusat lingkaran.

Untuk gerak melingkar dengan kelajuan yang tidak konstan, dapat dianalisa dengan menuliskan vektor kecepatan sebagai $\vec{v} = v\hat{u}$, dengan $\hat{u}$ adalah vektor satuan searah dengan arah kecepatan, dan menyinggung (tangensial terhadap) lintasan. Dengan menderivatifkan vektor kecepatan ini, diperoleh

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v\hat{u}}{\mathrm{d}t} = \hat{u}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

suku pertama disebut sebagai suku percepatan tangensial

$$\vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{u} = a_t\hat{u} \tag{10}$$

sedangkan pada suku kedua,

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{r} = -\frac{v}{r}\hat{r} \tag{11}$$

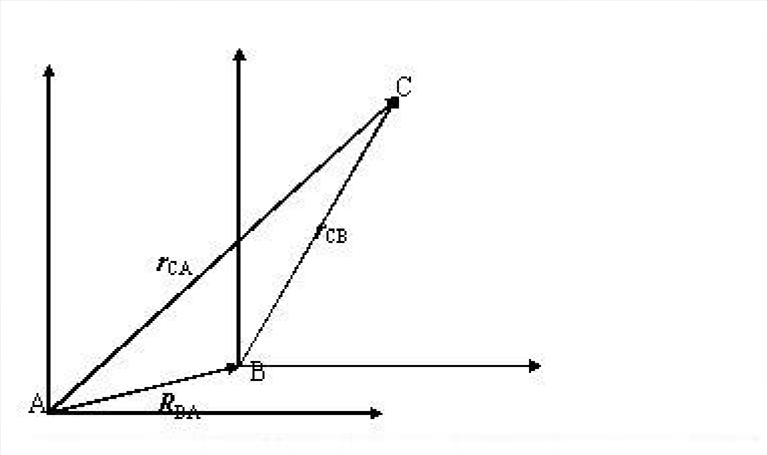
dengan $\hat{r}$ adalah vektor satuan arah radial. Maka suku kedua ini tidak lain adalah percepatan radial atau sentripetal

$$\vec{a}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{r} \tag{12}$$

Gerak Relatif

Ketika menganalisa gerak suatu partikel, kita meninjaunya relatif terhadap suatu titik acuan dan sistem koordinat tertentu, yang secara bersama-sama disebut sebagai kerangka acuan. Besaran-besaran gerak partikel tersebut, seperti posisi, kecepatan dan percepatan dapat bernilai berbeda bila dilihat dari kerangka acuan yang berbeda. Dalam analisa ini, kita memakai pendekatan klasik di mana waktu dianggap sama di semua kerangka acuan. Ditinjau misalnya suatu kerangka acuan A dan kerangka acuan kedua B. Posisi titik asal B dlihat dari titik asal A, diberikan oleh vektor $\vec{R}_{BA}(t)$. Posisi sebuah partikel C menurut kerangka A dan B secara berturutan adalah $\vec{r}_{CA}(t)$ dan $\vec{r}_{CB}(t)$. Hubungan antara $\vec{r}_{CA}(t)$ dan $\vec{r}_{CB}(t)$, diberikan oleh (lihat gambar)

$$\vec{r}_{CB}(t) = \vec{r}_{CA}(t) - \vec{R}_{BA}(t) = \tag{13}$$



Dari persamaan ini, dengan derivatif terhadap waktu, diperoleh hubungan kecepatan partikel menurut A dan B

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{CB}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{CA}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{R}_{BA}}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

atau

$$\vec{v}_{CB} = \vec{v}_{CA} - \vec{V}_{BA} \tag{15}$$

dengan $\vec{v}_{CB}$ adalah kecepatan partikel C dilihat dari kerangka B, $\vec{v}_{CA}$ adalah kecepatan partikel C dilihat dari kerangka A, dan $\vec{V}_{BA}$ adalah kecepatan kerangka B dilihat dari kerangka A.

Dari pers. (15), dengan menderivatifkannya terhadap waktu, diperoleh hubungan percepatan partikel menurut A dan B

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CB}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{CA}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{V}_{BA}}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

atau

$$\vec{a}_{CB} = \vec{a}_{CA} - \vec{a}_{BA} \tag{17}$$

dengan $\vec{a}_{CB}$ adalah kecepatan partikel C dilihat dari kerangka B, $\vec{a}_{CA}$ adalah kecepatan partikel C dilihat dari kerangka A, dan $\vec{a}_{BA}$ adalah kecepatan kerangka B dilihat dari kerangka A.

Kerangka Inersial

Kasus khusus adalah bila percepatan antara kerangka A dan B adalah nol, atau kerangka B bergerak relatif terhadap A dengan kecepatan konstan. Pada kasus ini, percepatan partikel ditinjau dari kedua kerangka bernilai sama. Kumpulan kerangka-kerangka acuan semacam ini disebut kerangka-kerangka acuan inersial. Mengenai sifat inersial ini, akan dibahas dalam bab selanjutnya.

WASSALAM

Figure 1: Al Khawarizm books cover

menu