

SKRIPSI

**FUNGSI-FUNGSI TERMODINAMIKA SISTEM
STATISTIKA FUZZY**

Frenky Suseno Manik

03/167928/PA/09509



**Departemen Pendidikan Nasional
Universitas Gadjah Mada
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Yogyakarta**

2007

SKRIPSI

FUNGSI-FUNGSI TERMODINAMIKA SISTEM STATISTIKA FUZZY

Frenky Suseno Manik

03/167928/PA/09509

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh
derajat Sarjana S1 Program Studi Fisika pada Jurusan Fisika



**Departemen Pendidikan Nasional
Universitas Gadjah Mada
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Yogyakarta**

2007

SKRIPSI

**FUNGSI-FUNGSI TERMODINAMIKA
SISTEM STATISTIKA FUZZY**

Frenky Suseno Manik

03/167928/PA/09509

Dinyatakan lulus ujian skripsi oleh tim penguji
pada tanggal 7 Desember 2006

Tim Penguji

H. Mirza Satriawan, Ph.D.
Pembimbing

Dr. Kuwat Triyana
Penguji I

Juliasih P., M.Si.
Penguji II

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa di dalam skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu perguruan tinggi dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam Daftar Pustaka.

Yogyakarta, 6 Februari 2007
Yang menyatakan

(Frenky Suseno Manik)



*Kupersembahkan skripsi ini dengan sepenuh
cinta karena Allah kepada:*

*Kedua orangtuaku: Buyung Adil Manik dan Tionggar Siagian, S.Pd.
atas pengorbanan tulus yang selama ini mereka curahkan.*

*Untuk adik-adikku: Anwar, Hamdani, Rabiyah, Mia dan Bachtiar
yang selalu menjadi sumber inspirasiku.*

*Kupersembahkan pula buat Ria Mawarti tersayang
atas do'a dan motivasi penuh cinta yang selama ini ia pancarkan.*

*Semoga karya ini dapat menjadi pemicu
dalam mengukir berjuta prestasi yang
diridhoi-Nya, amin.*

PRAKATA



“Jika engkau tak menyibukkan diri dengan kebenaran, maka dirimu akan disibukkan dengan yang bathil.”(Imam Syafi’ie)

Alhamdulillah, tugas berat ini selesai. Setelah sekian lama kaki ini melangkah menapaki roda perjuangannya, akhirnya skripsi ini dapat penulis rampungkan. Telah 3,5 tahun lamanya penulis mengarungi samudera perjuangan di kampus ini. Di tengah perjalanannya, acapkali bahtera perjuangan itu dihantam oleh badai dan deru ombak yang saling bersahutan. Mendebarkan. Sungguh menakutkan. Akan tetapi bejibun kenangan dan pelajaran yang didapat. Sungguh dunia kampus merupakan sebuah fase kehidupan yang sangat berharga.

Celakanya, sering pula cobaan dan deraan topan itu membuat penulis lemah tak berdaya. Pernah suatu ketika kapal itu hampir karam tanpa adanya motivasi dan keinginan yang kuat memecah ombak. Akibatnya, rasa jenuh, malas dan *futur* terus menjangkiti tekad bak virus yang mematikan potensi.

Namun, pujian bagi Allah, tantangan itu akhirnya terlewati jua dengan menyisakan sebuah kenangan pembelajaran yang sangat berharga; terlebih saat rintangan dan terjangan tersebut dapat penulis lewati dengan sikap ikhlas dan penuh kesabaran. Hingga kemudian, atas izin-Nya, penulis berhasil menyelesaikan studi dan memperoleh gelar pertama -Sarjana Sains (S.Si)- dari Program Studi Fisika Universitas Gadjah Mada. *Alhamdulillah*.

Tiada kata lain yang patut terucap melainkan ungkap rasa syukur yang teramat sangat kepada Allah Yang Maha Agung atas segala petunjuk dan kemudahan langkah yang Ia curahkan selama ini, sehingga bahtera pertama pun telah sampai ke pelabuhan menuju tujuan terbaiknya. Penulis sangat bersyukur atas kemudahan, kesempatan dan kelapangan ilmu yang Allah swt. curahkan. Semoga Dia juga memberikan kesempatan bagi penulis untuk dapat mengenyam jenjang pendidikan lanjut melalui bahtera perjuangan berikutnya. *Amin*.

Bagi penulis, karya ini merupakan anugerah yang sangat berharga. Sebuah *karya pena* yang turut mempengaruhi pemikiran penulis. Sebab, karya ini menguatkan detak potensi kreatifitas maupun produktifitas dalam berkarya dan

dengannya pula penulis semakin termotivasi untuk dapat menelurkan karya-karya selanjutnya. *Insyallah*.

Untuk itu, pada kesempatan ini, sungguh bahagianya hati ini kala bisa menghaturkan ungkap rasa terimakasih penulis kepada pihak-pihak yang telah banyak membantu, sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Tentu, tanpa dukungan dan partisipasi mereka, kesuksesan ini tidak dapat diraih. Secara khusus, perkenankan penulis menyampaikan ucapan terimakasih itu dengan sepenuh rasa hormat kepada orang-orang yang penulis sebutkan di lembar '**Ucapan Terimakasih**'. Namun, tidaklah mungkin lembar yang terbatas ini bisa menyebutkan semua orang yang telah berjasa. Hanya doa yang dapat penulis pancarkan; semoga Allah swt. selalu mencurahkan hidayah dan karunia-Nya kepada mereka semua. *Aamiin Ya Rabbal'alamiin*.

Demikian pengantar dari penulis; dan mohon maaf atas segala kesalahan dan kekurangan yang mungkin penulis perbuat, baik sengaja maupun dikala lupa, di dalam penyajian Tugas Akhir ini. Oleh itu, kritikan yang membangun sangat penulis nantikan dari para Pembaca demi perkembangan ilmu pengetahuan dan kesejahteraan manusia.

Terakhir, dengan penuh cinta, penulis persembahkan karya ini sebagai darma bakti kepada *Rabb* semesta alam. Semoga bermanfaat!

Frenky Suseno Manik

UCAPAN TERIMA KASIH

Dalam penulisan skripsi dan selama masa perkuliahan, banyak pihak yang telah berjasa. Kepada mereka penulis mengucapkan terima kasih. Ucapan terima kasih itu, tertuju pada:

1. Ucapan syukur terbesar penulis khususkan bagi Allah swt., Sang Pencipta, Yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang; atas hidayah, taufik dan karunia-Nya yang sangat berharga. Sehingga penulis masih menggecap betapa manisnya iman dan kesabaran.
2. Bapak dan Ibu tercinta, yang tidak henti-hentinya memberi dukungan berupa materi, moral, semangat, dan cinta kasih mulia yang penulis tidak akan pernah mampu membalasnya.
3. Ria Mawarti yang selalu menguatkan perjuangan melalui lantunan do'a dan motivasi tulus penuh cinta kepada penulis.
4. H. Mirza Satriawan, Ph.D. yang telah banyak memberikan waktu dan tenaga dalam membimbing skripsi, berdiskusi, dan memberikan wawasan kepada penulis tentang ilmu-ilmu fisika dan juga mengenai hakekat kehidupan. *Syukran jazakallah* atas ketauladanan yang Bapak tunjukkan selama ini. Selain membimbing Tugas Akhir, penulis juga kagum pada semangat Bapak dalam membina kepribadian mahasiswa agar mereka memahami bagaimana seharusnya menjalani kehidupan ini dengan Islam. Penulis selalu mendoakan; semoga Bapak selalu istiqomah sehingga meraih syurga-Nya kelak, amin.
5. Prof. H. Muslim dan Hj. Zahara Muslim, M.Si. yang banyak memberi nasehat dan motivasi pembelajaran kepada penulis, khususnya tentang JAMU PEMBELAJASA (Strategi Jaminan Mutu Pembelajaran Sains). Penulis akan selalu ingat niat baik Bapak dan Ibu atas hadiah, buku yang menarik, dan dukungan berharga lainnya. Semoga kebaikan yang tertoreh itu dapat menjadi amal mulia di sisi-Nya, amin.
6. Dr.rer.nat. Muhammad Farchani Rosyid yang pertama kali membuka wawasan penulis tentang aljabar abstrak di dalam fisika. Semoga suatu saat nanti penulis bisa lebih banyak menyelami ilmu dari Bapak dan berkolaborasi bersama dalam grup riset fisika teori yang mengasyikkan.

Ucapan Terima Kasih

7. Dr. Arief Hermanto yang telah banyak kebersamai penulis dalam berdiskusi, khususnya pada saat kuliah Filsafat Fisika.
8. Dr. Kuwat Triyana dan Juliasih P., M.Si. yang telah berkenan menguji penulis di sidang pendadaran Tugas Akhir.
9. Dr. Akhmad Aminudin Bama yang telah mengajari penulis teknik ‘berkerja’ menggunakan program $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$.
10. Imansyah Putra, S.Si. yang telah berjasa mengajari penulis bagaimana seharusnya menyusun ‘peta hidup’.
11. Seluruh staf pengajar Program Studi Fisika (Ibu Palupi, Ibu Chotimah, Pak Bambang, Pak Wagini, Pak Ikhsan, Pak Eko, Pak Joko, Pak Mitra, Pak Guntur, Pak Bayu, Mas Fahrudin, dll.) yang selama ini terus menularkan inspirasi melalui ilmu dan pengalaman yang menakjubkan.
12. Sahabat-sahabat Fisika UGM yang telah mewarnai lembaran pengalaman hidup penulis dengan goresan-goresan indah.
13. Teman-teman satu kos (Klebengan CT VIII D 16 A Sleman DIY) yang menyenangkan: Mas Andreas, Mas Imam, Mas Yommi, Mas Herid, Mas Boni, Mas Tery, Mas Indro, Mas Bambang, Widodo, Leo, Eka, Wahyudi, Sugeng, Andi dan Nurdin.
14. Rekan-rekan seperjuangan di Forum Studi Islam An Nahdhoh: Firdaus, Wahyu, Yusanto, Tomi dan Danang. Semoga Allah swt. selalu membimbing kita Akhi! ;-)
15. Teman-teman kelompok “underground” yang telah menjadi teman diskusi yang menyenangkan.
16. Dan pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan wawasan baru bagi Pembaca sehingga karya ini dapat berkontribusi bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan kesejahteraan manusia.

DAFTAR ISI

Halaman Judul	ii
Pengesahan	iii
Pernyataan	iv
Persembahan	v
Prakata	vi
Ucapan Terima Kasih	viii
Daftar Isi	x
Daftar Gambar	xii
Arti Lambang dan Singkatan	xiii
Intisari	xiv
Abstract	xv
I Pendahuluan	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Batasan Permasalahan	3
1.3 Tujuan	4
1.4 Metode Penelitian	4
1.5 Sistematika Penelitian	4
II Fungsi Partisi Kanonik Lengkap Sistem Statistika Fuzzy	6
2.1 Pengantar	6
2.2 Ekstensifitas dan Faktorisasi FPKL	6
2.3 Statistika Kuantum	8
2.4 Fungsi Partisi Kanonik Lengkap	9
2.5 Statistika Fuzzy	11

III	Perhitungan Fungsi-fungsi Termodinamika Sistem Statistika	
	Fuzzy	16
3.1	Deskripsi Besaran Termodinamika Melalui FPKL Suatu Sistem	16
3.2	Perhitungan Fungsi-fungsi Termodinamika Sistem Statistika Fuzzy (0,2)	18
3.3	Perilaku Sistem Statistika Fuzzy (0,2)	27
	3.3.1 Rerata Jumlah Total Partikel	28
	3.3.2 Energi Internal Sistem	29
	3.3.3 Panas Jenis Sistem	29
	3.3.4 Entropi Sistem	30
IV	Kesimpulan dan Saran	38
4.1	Kesimpulan	38
4.2	Saran	39
	Daftar Pustaka	40
	Lampiran	41
A	Grafik Fungsi-fungsi Termodinamika	41

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Grafik S/Nk versus μ	31
Gambar 3.2	Grafik S/Nk versus μ	32
Gambar 3.3	Grafik N/V versus μ	33
Gambar 3.4	Grafik N/V versus T , dengan $\mu \leq 0$	34
Gambar 3.5	Grafik $U/N\mu_0$ versus T dengan μ berbeda	35
Gambar 3.6	Grafik $U/N\mu_0$ versus T	36
Gambar 3.7	Grafik C_V/Nk versus T	36
Gambar 3.8	Grafik S/Nk versus T	37
Gambar A.1	Grafik N/V versus T ; μ tetap	41
Gambar A.2	Grafik N/V versus T ; dengan variabel μ berbeda	42
Gambar A.3	Grafik N/V versus μ	42
Gambar A.4	Grafik N/V versus μ , T tetap	43
Gambar A.5	Grafik $U/N\mu_0$ versus T , μ tetap	43
Gambar A.6	Grafik $U/N\mu_0$ versus T , μ berbeda	44
Gambar A.7	Grafik $U/N\mu_0$ versus T , $\mu \leq 0$	45
Gambar A.8	Grafik $U/N\mu_0$ versus μ , T tetap	46
Gambar A.9	Grafik $U/N\mu_0$ versus μ	47
Gambar A.10	Grafik C_V/Nk versus T	48
Gambar A.11	Grafik C_V/Nk versus μ	48
Gambar A.12	Grafik S/Nk versus T	49
Gambar A.13	Grafik S/Nk versus T	49
Gambar A.14	Grafik S/Nk versus T	50
Gambar A.15	Grafik S/Nk versus T	50

ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

Lambang matematika dan fisika maupun singkatan beserta artinya yang digunakan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

Z	Fungsi partisi kanonik lengkap suatu sistem
m	Aras energi
FPKL	Fungsi partisi kanonik lengkap
T	Temperatur
k	Tetapan Boltzmann ($k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K)
μ	Potensial kimia
V	Volume
N	Rerata jumlah partikel
S	Entropi
U	Energi internal
C_V	Panas jenis
Φ	Potensial termodinamik sistem sebarang
s_λ	Polinomial Schur
Δ	Polinomial Vandermonde
λ_n	Partisi
E	Energi
\hat{H}	Hamiltonian
\mathcal{H}_λ	Ruang Hilbert bertipe simetri λ
\hat{N}_α	Operator pencacah banyaknya partikel yang berada pada $ i_\alpha\rangle$

INTISARI

Oleh:

Frenky Suseno Manik
03/167928/PA/09509

Telah dilakukan perhitungan fungsi-fungsi termodinamika sistem partikel gas ideal yang memenuhi statistika fuzzy $(0, 2)$ melalui deskripsi fungsi partisi kanonik lengkapnya yang ekstensif dan uniter. Karakteristik fungsi-fungsi termodinamika sistem statistika fuzzy $(0, 2)$ yang diperoleh dan ditampilkan dalam bentuk grafik menyerupai sistem Fermi gas ideal untuk beberapa fungsi termodinamika (N , U , S , dan C_V), namun nilainya relatif lebih tinggi kecuali energi internal U . Sistem statistika fuzzy $(0, 2)$ ini juga mensyaratkan $\mu \leq 0$.

Katakunci: Statistika Fuzzy, Fungsi-fungsi Termodinamika.

ABSTRACT

By:

Frenky Suseno Manik
03/167928/PA/09509

We have calculated the thermodynamics functions for a system of ideal gas particles obeying $(0, 2)$ -fuzzy statistics through its grand canonical partition functions. The characteristics of the thermodynamics functions of the obtained $(0, 2)$ -fuzzy statistics, which is presented in the form of graphics, are similar to the ideal Fermi gas system for several thermodynamics functions (N , U , S , and C_V), but with relative higher values except for internal energy U . This $(0, 2)$ -fuzzy statistics system also requires $\mu \leq 0$.

Keywords: Fuzzy Statistics, Functions of Thermodynamics.

Bab I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Mekanika statistik menunjukkan bahwa sifat makroskopik sistem banyak partikel sebenarnya berhubungan erat dengan sifat mikroskopik partikel-partikel tersebut. Walaupun mekanika statistik tidak dapat menjelaskan interaksi antar partikel individual, tinjauan terhadap interaksi rata-rata maupun perilaku interaksi partikel dengan peluang terbesar mampu memberikan informasi mengenai besaran-besaran fisis yang menggambarkan sifat makroskopiknya.

Di alam, partikel-partikel yang ada dapat diklasifikasikan kepada dua jenis statistik. Jenis statistik partikel pertama adalah golongan partikel-partikel yang memenuhi kaidah statistika Bose-Einstein sedangkan yang kedua adalah partikel-partikel yang memenuhi kaidah statistika Fermi-Dirac.

Partikel-partikel yang memenuhi statistik Bose-Einstein disebut partikel-partikel boson yang fungsi gelombangnya simetrik terhadap pertukaran sebarang dua partikelnya. Contohnya antara lain foton, partikel alfa dan atom Helium. Sedangkan partikel-partikel fermion adalah partikel yang memenuhi statistika Fermi-Dirac, yaitu partikel-partikel yang fungsi gelombangnya antisimetrik terhadap pertukaran sebarang dua partikel. Contohnya antara lain proton, neutron dan elektron.

Masing-masing jenis statistik partikel ini akan memerikan dan mengatur perilaku maupun keadaan anggota sistem partikelnya untuk menempati sejumlah energi tertentu yang diperbolehkan. Dengannya, dapat pula diperoleh informasi berapa banyak partikel yang menempati energi-energi tertentu. Kedua jenis statistika tersebut sudah dibuktikan kebenarannya melalui berbagai eksperimen.

Akan tetapi, telah banyak pula para fisikawan yang berusaha membuat formulasi statistika sistem banyak partikel yang lebih umum dari jenis statistika yang telah ada, baik dengan membuat jenis statistika partikel yang baru, maupun dengan menggeneralisasi statistika Bose dan Fermi.

Perkembangan ini tidak terlepas dari pemahaman bahwa kaidah-kaidah mekanika kuantum tidak menentukan jenis statistika partikel, sehingga menjadi salah satu pertanyaan besar mengapa hanya ada statistika Bose-Einstein dan Fermi-Dirac di alam, atau dimungkinkan ada jenis statistika yang lain?

Hal inilah yang membuat beberapa fisikawan merumuskan jenis statistik baru kendati pun secara eksperimen belum ada sistem partikel yang memenuhi jenis statistika tersebut. Walaupun jenis statistika baru ini belum teruji di ranah eksperimen, sebagian dari teori-teori ini dapat digunakan untuk menganalisa sistem-sistem tertentu sebagai *teori efektif*, tidak sebagai teori fundamental, yaitu penggunaan statistika baru ini efektif secara fenomenologis dalam menjelaskan beberapa kasus tertentu; misalnya penggunaan *statistika anyon* untuk sistem partikel yang geraknya terbatas di dalam dua dimensi.

Usaha untuk membuat teori statistika selain statistika Bose-Einstein dan Fermi-Dirac dilakukan pertama kali oleh Gentile (1940) dengan membolehkan lebih dari satu partikel dengan bilangan kuantum yang sama (pada level energi yang sama), sehingga tidak seperti fermion, tetapi maksimum jumlah partikel yang dapat memiliki bilangan kuantum yang sama tidak tak terbatas, sehingga

tidak seperti boson.

Beberapa jenis statistik partikel selain Bose dan Fermi yang telah diperkenalkan antara lain: *null statistics*, “*doubly-infinite*” *statistics*, *orthofermi statistics*, *hubbard statistics*, dan lain-lain (Mishra dan Rajasekaran, 1995). Jenis statistik yang merupakan hasil generalisasi dari statistik yang telah ada antara lain: *intermediate statistics*, *parastatistics*, *infinite statistics*, *paronic statistics*, *anyon statistics*, dan lain-lain (Greenberg, 1993).

Jenis statistika lainnya adalah *statistika fuzzy*, yang pertama kali diperkenalkan oleh Imbo (Satriawan, 2002), menarik untuk diselidiki lebih lanjut. Walaupun tidak ada indikasi bahwa partikel-partikel fundamental yang ada di alam saat ini memenuhi aturan statistika fuzzy, teori ini amat menantang untuk ditelaah karena statistika fuzzy merupakan salah satu bentuk statistika ekstensif yang umum.

Dalam kerangka berfikir statistika fuzzy, statistika Bose dan Fermi merupakan kasus khusus untuk suatu nilai parameter-parameter tertentu. Dari sifat statistika tersebut, dapat dijadikan dasar untuk mengklarifikasi apakah suatu sistem fisis memenuhi statistik ini atau tidak. Sifat-sifat termodinamika sistem statistika ini, bisa diketahui dari *grand canonical partition function* (GCPF) atau fungsi partisi kanonik lengkapnya (FPKL).

Dalam skripsi ini, akan dihitung beberapa fungsi termodinamika sederhana untuk sistem banyak partikel identik yang memenuhi aturan statistika fuzzy. Fungsi FPKL statistika fuzzy akan digunakan sebagai dasar untuk menghitung besaran-besaran termodinamika yang sederhana, seperti rerata jumlah total partikel N , entropi S , energi internal U dan panas jenis C_V .

1.2 Batasan Permasalahan

Dalam penulisan Tugas Akhir ini, perlu dikemukakan batasan-batasan permasalahan agar pokok-pokok bahasan dapat lebih terfokus:

1. Sistem partikel yang ditinjau adalah sistem partikel-partikel identik bebas tidak saling berinteraksi (sistem gas ideal) yang mengikuti statistika fuzzy $(0, 2)$.
2. Besaran-besaran termodinamika yang dihitung adalah besaran-besaran termodinamika sederhana yang diperoleh melalui fungsi partisi kanonik lengkap Z , seperti: jumlah rerata partikel N , entropi S , energi internal U dan panas jenis C_V .

1.3 Tujuan

Tugas Akhir ini dimaksudkan untuk:

1. Menghitung fungsi-fungsi termodinamika sederhana untuk model sistem statistika fuzzy yang ditampilkan juga dalam bentuk grafik.
2. Mengetahui kecenderungan dan kelakuan fungsi-fungsi termodinamika model sistem statistika fuzzy.

1.4 Metode Penelitian

Penelitian Tugas Akhir ini dilakukan dengan studi literatur dan disertai perhitungan sederhana dengan bantuan program *maple 9.5*.

1.5 Sistematika Penelitian

Tugas Akhir ini terdiri dari beberapa bab dan masing-masing bab dipecah dalam beberapa sub-bab dengan memerinci pokok-pokok permasalahan, sehingga penyajian Tugas Akhir ini dapat dilakukan secara sistematis.

Bab I : Pendahuluan; berisi uraian mengenai hal-hal yang melatarbelakangi penulisan, batasan permasalahan, sistematika penulisan dan faedah penulisan.

Bab II : Fungsi Partisi Kanonik Lengkap Statistika Fuzzy; berisi uraian tentang fungsi partisi kanonik lengkap dan fungsi-fungsi termodinamika lain yang terkait dengannya.

Bab III : Perhitungan Fungsi-fungsi Termodinamika Sistem Statistika Fuzzy; berisi hasil-hasil perhitungan fungsi-fungsi termodinamika sederhana untuk sistem statistika fuzzy dan pembahasan mengenai kecenderungan fungsi-fungsi termodinamika yang diperoleh dari perhitungan dan dilengkapi pula dengan tampilan grafik.

Bab IV : Kesimpulan dan Saran

Bab II

FUNGSI PARTISI KANONIK LENGKAP SISTEM STATISTIKA FUZZY

2.1 Pengantar

Dalam termodinamika, biasanya sifat-sifat atau keadaan sistem ditentukan oleh besaran-besaran seperti volume V , temperatur T , tekanan P , kapasitas panas dan sebagainya. Besaran-besaran itu disebut koordinat termodinamik atau koordinat sistem karena mempunyai sifat-sifat khusus pada keadaan sistem tertentu. Oleh karena koordinat termodinamik turut mempengaruhi dan menentukan sifat-sifat serta keadaan sistem, maka koordinat termodinamika juga disebut variabel keadaan sistem.

Variabel keadaan sistem dapat dibagi atas dua jenis yaitu variabel keadaan yang dipengaruhi oleh massa total sistem atau jumlah mol disebut variabel ekstensif dan variabel keadaan yang tidak dipengaruhi oleh massa total sistem disebut variabel intensif.

Agar dapat menjamin kuantitas termodinamika (seperti entropi, energi dalam, jumlah partikel, dll.) berperilaku sebagai fungsi yang ekstensif, yaitu fungsi yang turut berubah seiring dengan berubahnya massa atau volume sistem, Fungsi Partisi Kanonik Lengkapnya (FPKL) haruslah memenuhi aturan tertentu.

2.2 Ekstensifitas dan Faktorisasi FPKL

Untuk statistika Bose dan Fermi, ekstensifitas merupakan akibat faktorisasi FPKL menjadi FPKL untuk level energi tunggal.

$$Z(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m Z(x_i) \quad (2.1)$$

dengan $x_i = e^{\beta(\mu - E_i)}$ dan m adalah jumlah energi level.

Mudah dimengerti bahwa apabila FPKL pada suatu sistem sebarang terfaktorisasi dengan cara seperti ini, pada limit energi kontinum, maka kita akan mempunyai sebuah sistem yang ekstensif pula.

Sebagai ilustrasi, tinjau suatu potensial termodinamik Φ sistem sebarang. Potensial termodinamik Φ didefinisikan sebagai logaritma dari FPKL sehingga nilainya akan menjadi jumlahan logaritma FPKL tersebut. Kemudian, dalam penjabarannya, akan muncul suatu besaran V yang menunjukkan potensial termodinamik Φ sebanding dengan V . Dengan demikian terbukti bahwa Φ merupakan variabel keadaan sistem yang bersifat ekstensif oleh karena faktorisasi FPKL seperti di atas.

Berikut deskripsi singkat besaran Φ akibat faktorisasi pada persamaan (2.1) di atas.

$$\Phi = -\frac{1}{\beta} \log Z(x_1, \dots, x_m) = -\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^m \log Z(x_i) \quad (2.2)$$

Ketika limit energi kontinum, jumlahan di dalam persamaan (2.2) dapat diganti dengan pengintegralan untuk seluruh ruang fasa yang invarian.

$$\sum_i \rightarrow \int \frac{d^3r \, d^3p}{h^3} = \frac{4\pi V}{h^3} \int p^2 \, dp \quad (2.3)$$

dengan p adalah momentum, h adalah tetapan Planck, sedangkan V adalah

volume. Sehingga potensial termodinamik sistem tersebut bersifat ekstensif.

Dengan demikian telah tampak bahwa apabila FPKL pada suatu sistem sebarang terfaktoriasi dengan cara seperti persamaan (2.1), pada limit energi kontinum, maka akan didapat suatu sistem yang ekstensif. Secara umum, ekstensifitas suatu kuantitas termodinamika sebenarnya bukan hanya dibatasi oleh sifat tersebut. Dengan kata lain, ekstensifitas pun dimungkinkan tanpa harus akibat dari faktorisasi FPKL di atas.

Akan tetapi, dalam Tugas Akhir ini, kami hanya akan meninjau sifat ekstensifitas sebagai suatu akibat dari faktorisasi seperti pada persamaan (2.1). Faktorisasi ini pertama kali diperkenalkan oleh Polychronakos (1996) yang ia sebut sebagai dekomposisi gugus kuat (*strong cluster decomposition*).

2.3 Statistika Kuantum

Beberapa upaya telah digagas untuk mendapatkan bentuk statistika kuantum yang ekstensif dan secara langsung berinterpolasi di antara statistika Bose dan Fermi. Meskipun model-model statistika ini bukan satu kesatuan yang padu, teori ini juga tampak efektif kaitannya dalam beberapa konteks kajian, misalnya *quons statistics* yang diperkenalkan oleh Greenberg (1993).

Sebelumnya Hartle dkk. (1970) telah menunjukkan bahwa parastatistik merupakan salah satu dari teori-teori kuantum statistik yang memenuhi kaidah dekomposisi gugus (*cluster decomposition*). Kaidah ini menyatakan bahwa pengukuran besaran-besaran fisika untuk partikel-partikel yang terisolasi tidak bergantung pada ada atau tidak adanya partikel-partikel lain di tempat berbeda yang cukup jauh.

Beberapa tahun kemudian, (Polychronakos, 1996; Meljanac dkk., 1996; Chaturvedi dan Srinivasan, 1997) berhasil merumuskan FPKL untuk jenis sta-

tistik baru tersebut, yaitu parastatistik, yang merupakan hasil generalisasi dari statistik Bose dan Fermi.

Dalam subbab ini kami akan menyajikan ulang penjabaran FPKL umum suatu sistem partikel identik yang ekstensif dan uniter agar didapatkan suatu jenis statistika baru yang merupakan hasil generalisasi dari statistik Bose dan Fermi. Adapun yang kami maksud dengan ekstensif adalah kondisi suatu sistem sebarang yang FPKL-nya terfaktorisasi seperti pada persamaan (2.1). Sedangkan yang kami maksud dengan uniter ialah tidak adanya probabilitas negatif terkait dengan sistem kuantum statistik yang dideskripsikan oleh FPKL.

2.4 Fungsi Partisi Kanonik Lengkap

Tinjau suatu sistem partikel-partikel yang tidak saling berinteraksi, dengan Hamiltoniannya diberikan oleh

$$\hat{H} = \sum_{\alpha}^m E_{\alpha} \hat{N}_{\alpha} \quad (2.4)$$

dimana E_{α} merupakan energi keadaan kuantum partikel tunggal $|i_{\alpha}\rangle$ dan \hat{N}_{α} merupakan operator yang mencacah banyaknya partikel yang berada pada $|i_{\alpha}\rangle$, sedangkan m menunjukkan jumlah aras energi yang berbeda (dapat merosot), dinotasikan sebagai $i_{\alpha} = 1, \dots, m$, dengan m dapat tak berhingga.

Secara umum, FPKL dapat ditulis sebagai [lihat misalnya: Huang (1965); Sears dan Sallinger (1975); Greiner dkk. (1995)]

$$Z(x_1, \dots, x_m) = \text{Tr } e^{\beta(\mu\hat{N} - \hat{H})} \quad (2.5)$$

dengan $x_i = e^{\beta(\mu - E_i)}$, $\beta = 1/kT$, T adalah temperatur mutlak, k adalah kon-

stanta Boltzmann ($k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K) dan μ adalah potensial kimia. Sedangkan *trace*-nya meliputi semua keadaan yang ada pada sistem yang ditinjau.

FPKL untuk sistem partikel identik yang invarian terhadap permutasi partikel telah diformulasikan secara terpisah oleh Polychronakos (1996); Meljanac dkk. (1996); Chaturvedi dan Srinivasan (1997), dalam bentuk jumlahan polinomial-polinomial Schur

$$Z(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda(x_1, \dots, x_m) \quad (2.6)$$

dengan Λ bergantung pada jenis statistik partikel yang ditinjau. Sedangkan polinomial Schur, $s_\lambda(x_1, \dots, x_m)$, merupakan polinomial simetris dalam variabel m yang didefinisikan sebagai berikut (Fulton, 1991):

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} \frac{|x_j^{m+\lambda_i-i}|}{\Delta(x_1, \dots, x_m)} & \text{untuk } \lambda_{m+1} = 0 \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \quad (2.7)$$

dengan $\Delta(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i < j}^m (x_i - x_j)$ adalah polinomial Vandermonde.

Bentuk polinomial Schur bergantung pada parameter λ yang merupakan partisi dari suatu bilangan bulat n , dimana $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$ dengan $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, dan $\sum_i \lambda_i = n$. Untuk setiap λ terkait suatu tabel Young yang berupa kotak-kotak rata kiri dengan λ_i kotak pada baris ke- i .

Satriawan (2002) telah memodifikasi ulang FPKL di atas untuk suatu sistem parastatistik yang diperumum. Adapun bentuk FPKL parastatistik yang telah diperumum tersebut (untuk seluruh λ) adalah sebagai berikut

$$Z(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\text{semua } \lambda} c_\lambda s_\lambda(x_1, \dots, x_m) \quad (2.8)$$

dengan c_λ dapat diinterpretasikan sebagai probabilitas keberadaan state partikel dengan tipe simetri λ tertentu.

Dalam parastatistik biasa, nilai c_λ selalu satu atau nol. Sedangkan di sini, nilai c_λ adalah sebarang bilangan riil non-negatif untuk memenuhi syarat uniter yang telah disebutkan di atas. Jika $c_\lambda = 0$, kasus ini mempunyai makna bahwa tidak ada state yang bertipe simetri λ di dalam sistem tersebut.

2.5 Statistika Fuzzy

Beberapa sifat dari fungsi Schur adalah $s_\lambda(x) = x^n$ jika $\lambda = (n)$ (representasi trivial) dan $s_\lambda(x) = 0$ selainnya, sehingga $Z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{(k)} x^k$, dimana $c_{(k)}$ adalah c_λ untuk $\lambda = (k)$. Apabila persamaan (2.8) dimasukkan ke dalam persamaan (2.1), akan diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{\text{semua } \lambda} c_\lambda s_\lambda(x_1, \dots, x_m) &= \prod_{i=1}^m \sum_{k_i} c_{(k_i)} s_{(k_i)}(x_i) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_m} c_{(k_1)} \cdots c_{(k_m)} x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dengan menulis ulang jumlahan seluruh k_i di atas sebagai suatu jumlahan yang melingkupi seluruh bilangan bulat $n \geq 0$ untuk seluruh k_i , $k_1 + \cdots + k_m = n$, dan dengan menggunakan “polinomial monomial simetri“ (Fulton, 1991), kita dapat menggantikan relasi di atas menjadi

$$\sum_{\text{semua } \lambda} c_\lambda s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\text{semua } \nu} c_{(\nu_1)} \cdots c_{(\nu_m)} m_\nu(x_1, \dots, x_m) \quad (2.10)$$

Melalui relasi polinomial Schur dan ‘monomial simetri polinomial’ (Fulton, 1991)

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\nu} K_{\lambda\nu} m_\nu(x_1, \dots, x_m), \quad (2.11)$$

dimana $K_{\lambda\nu}$ adalah suatu konstanta yang dikenal sebagai bilangan Kostka, persamaan (2.10) menjadi

$$\sum_{\nu} \sum_{\text{semua } \lambda} c_{\lambda} K_{\lambda\nu} m_{\nu}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\nu} c_{(\nu_1)} \cdots c_{(\nu_m)} m_{\nu}(x_1, \dots, x_m) \quad (2.12)$$

Untuk ν yang berbeda-beda, $m_{\nu}(x_1, \dots, x_m)$ adalah bebas linear, maka diperoleh relasi

$$\sum_{\lambda} K_{\lambda\nu} c_{\lambda} = c_{(\nu_1)} \cdots c_{(\nu_m)} \quad (2.13)$$

Dari teori fungsi simetri diketahui bahwa hubungan ini ternyata sama dengan relasi determinan untuk setiap λ (Fulton, 1991)

$$c_{\lambda} = \det (c_{(\lambda_i + j - i)}) \quad (2.14)$$

Dengan demikian, bila semua nilai-nilai $c_{(k)}$ telah diberikan maka semua nilai c_{λ} dapat ditentukan pula. Ini merupakan suatu pencerminan terhadap fakta bahwa seluruh informasi di dalam suatu FPKL yang ekstensif sebenarnya terkandung di dalam FPKL energi tunggal.

Sejauh ini kita belum menambahkan sesuatu ikhtisar yang menjelaskan arti fisis c_{λ} . Berikut akan ditunjukkan makna fisis c_{λ} tersebut.

Dari persamaan (2.13) untuk $\nu = (1, 1, \dots, 1) \equiv (1^n)$ dapat diperoleh

$$\sum_{\lambda \vdash n} d_{\lambda} c_{\lambda} = c_{(1)}^n, \quad (2.15)$$

dimana digunakan fakta bahwa $K_{\lambda(1^n)} = d_{\lambda}$. Di sini, d_{λ} adalah dimensi wakilan λ grup S_n .

Nilai $c_{(1)}$ secara umum adalah 1, yang berarti bahwa hanya ada 1 state untuk keadaan satu partikel (dengan bilangan kuantum tertentu). Akibatnya,

dalam hal ini, kita mempunyai $\sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda c_\lambda = 1$ yang memuat interpretasi probabilitas untuk c_λ .

Koefisien d_λ , di dalam persamaan (2.15), juga sama dengan jumlah (maksimum) sub ruang tak tereduksi S_n yang terkait dengan λ . Untuk itu, $d_\lambda c_\lambda$ dapat dimaknai pula sebagai probabilitas keadaan sistem berada di dalam ruang Hilbert yang bertipe simetri λ , yaitu \mathcal{H}_λ . Selain itu, c_λ dapat juga diinterpretasikan sebagai dimensi pecahan sistem partikel pada \mathcal{H}_λ , mengikuti semangat *fractional exclusion statistics* yang diperkenalkan oleh Haldane (1991). Walau bagaimanapun, c_λ harus selalu non-negatif agar memenuhi syarat uniter. Akan tetapi, tidak cukup memastikan c_λ non-negatif dengan membuat $c_{(k)}$ non-negatif.

Kondisi uniter mensyaratkan determinan pada persamaan (2.14) bernilai non-negatif. Dan telah ditunjukkan bahwa kondisi tersebut berlaku untuk $c_{(k)}$ yang memenuhi persamaan fungsi generasi berikut (Satriawan, 2002), yaitu

$$\sum_k c_{(k)} t^k = \prod_{j=1}^p \prod_{i=1}^q e^{\gamma t} \frac{(1 + \alpha_i t)}{(1 - \beta_j t)}, \quad (2.16)$$

dengan α_i, β_j dan $\gamma \geq 0$ dan memenuhi kaitan $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j + \gamma = 1$ (karena $c_{(1)} = 1$).

Jika kita memilih $t = x$, fungsi generasi ini sebenarnya tiada lain adalah FPKL untuk level energi tunggal. Jadi, FPKL untuk satu partikel tunggal dapat dituliskan sebagai berikut

$$Z(x) = \prod_{j=1}^p \prod_{i=1}^q e^{\gamma x} \frac{(1 + \alpha_i x)}{(1 - \beta_j x)}. \quad (2.17)$$

Setiap pemilihan parameter-parameter α_i, β_j dan γ didefinisikan sebagai suatu tipe statistika kuantum untuk partikel-partikel identik yang ekstensif

dan uniter.

Selain itu parameter-parameter ini juga memerikan berbagai tipe statistika yang beragam. Jenis statistika kuantum seperti ini, bekerja pada sistem partikel-partikel identik yang ekstensif dan uniter, disebut *statistika fuzzy* (Satriawan, 2002).

Sedangkan fungsi partisi kanonik lengkap sistem statistitika fuzzy ini, dalam m energi level, berdasarkan persamaan (2.1) dan (2.17), adalah sebagai berikut

$$Z(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^p \prod_{k=1}^q e^{\gamma x_i} \frac{(1 + \alpha_k x_i)}{(1 - \beta_j x_i)}. \quad (2.18)$$

Apabila $\gamma = 0$, relasi di dalam persamaan (2.16) merupakan fungsi generasi untuk fungsi simetri lengkap polinomial superSchur $h_{(k)}(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_p)$ yaitu

$$c_{(k)} = h_{(k)}(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_p) \quad (2.19)$$

Karena itu, $c_\lambda = s_\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_p)$ (polinomial superSchur). Nilai $s_\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_q; \beta_1, \dots, \beta_p)$ akan lenyap ketika λ di luar cakupan (p, q) ¹, dan selalu bernilai positif untuk λ yang berada di dalam cakupan (p, q) . Kasus ini disebut *statistitika fuzzy* (p, q) . Nilai-nilai p dan q tersebut, dalam kerangka berfikir statistika fuzzy, akan menentukan berapa buah parameter α dan β muncul di dalam FPKL-nya.

Statistika Bose dan Fermi adalah kasus khusus dari tipe statistika ini. Untuk kasus Fermi, hanya ada satu parameter α , sedangkan kasus Bose muncul satu parameter β , ketika parameter lainnya nol (sesuai dengan statistika fuzzy $(0, 1)$ dan $(1, 0)$ untuk masing-masing Fermi dan Bose). Di dalam statistika fuzzy $(0, q)$ tampak bahwa $c_{(n)}$ akan lenyap apabila $n > q$. Jadi, untuk kasus ini, tidak ada state n -partikel yang seluruh partikelnya mempunyai bilangan

¹ Cakupan (p, q) adalah semua partisi λ dengan $\lambda_{p+1} \leq q$

kuantum sama, yang merupakan generalisasi prinsip larangan Pauli.

Ketika $\gamma \neq 0$, kita dapat menganggap $e^{\gamma t}$ sebagai suatu limit yang memenuhi faktor berikut

$$e^{\gamma t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\gamma t}{n}\right)^n \quad (2.20)$$

Kemudian, kita dapat menganggap γ/n sebagai bentuk lain dari α_i . Walaupun faktorisasi ini tidak unik, c_λ masih boleh dipandang -di dalam kasus ini- sebagai sebuah jenis polinomial superSchur umum dengan parameter-parameter α_i yang tidak terbatas banyaknya. Oleh karena itu ketika $\gamma \neq 0$ semua c_λ tidak akan lenyap, walaupun mungkin seluruh c_λ tersebut bernilai sangat kecil untuk kondisi n yang sangat besar. Kasus ini dapat kita sebut statistika fuzzy tidak terhingga (*fuzzy infinite statistics*).

Sebuah kasus khusus saat seluruh α_i dan β_i bernilai nol dan $\gamma = 1$, akan diperoleh $c_\lambda = d_\lambda/n!$. Persamaan (2.16) ini sama dengan level energi tunggal FPKL untuk jenis statistika Maxwell-Boltzmann (MB) yang sudah terkoreksi Gibbs. Walaupun statistika MB dapat dilihat sebagai batas klasik statistika Bose dan Fermi, di sini kita dapat meninjaunya sebagai suatu bentuk mendasar jenis statistika fuzzy.

Bab III

PERHITUNGAN FUNGSI-FUNGSI TERMODINAMIKA SISTEM STATISTIKA FUZZY

Fungsi partisi kanonik lengkap (FPKL) pada persamaan (2.18) merupakan fungsi partisi sistem statistika fuzzy untuk sistem partikel identik bebas yang tidak saling berinteraksi di dalam m energi level. Sistem statistika ini amat menarik untuk ditelaah karena merupakan salah satu bentuk statistika eksten-sif yang umum. Penggambaran fungsi-fungsi termodinamika sistem statistika fuzzy tersebut dapat diperoleh melalui deskripsi FPKL-nya.

3.1 Deskripsi Besaran Termodinamika Melalui FPKL Suatu Sistem

Tinjau suatu model aras energi untuk sistem fisis berupa sistem partikel iden-tik bebas yang tidak saling berinteraksi (gas ideal). Energi setiap partikelnya diasumsikan diberikan oleh

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \tag{3.1}$$

dengan m adalah massa partikel dan $\hbar \vec{k}$ adalah momentum.

Penjabaran besaran-besaran termodinamika (seperti rerata jumlah partikel N , entropi S , energi internal U dan panas spesifik C_V) yang dideskripsikan dari

fungsi partisi kanonik lengkap Z , dapat diperoleh melalui potensial kanonik lengkapnya, yaitu

$$\Phi(T, V, \mu) = -kT \ln Z(T, V, \mu) \quad (3.2)$$

dengan μ adalah potensial kimia.

Rerata jumlah partikel N merupakan besaran ekstensif. Untuk sistem yang terbuka (ensembel makrokanonik) —yaitu suatu sistem yang dapat melakukan pertukaran partikel dan energi dengan lingkungannya— jumlah partikelnya tidak tetap, tetapi rerata jumlah partikel dapat diketahui melalui [lihat misalnya: Huang (1965), Sears dan Sallinger (1975), Greiner, dkk., (1995)]

$$N(T, V, \mu) = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right|_{T, V} \quad (3.3)$$

Entropi suatu sistem yang terbuka (ensembel makrokanonik) dapat diperoleh melalui:

$$S(T, V, \mu) = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right|_{V, \mu} \quad (3.4)$$

Untuk sistem yang terbuka (ensembel makrokanonik), energi sistem tidak tetap melainkan berfluktuasi disekitar suatu nilai rerata yang tercapai saat sistem berada dalam keadaan setimbang termal dengan lingkungan. Rerata energi internal sistem dapat diperoleh dari [lihat misalnya: Huang (1965); Sears dan Sallinger (1975); Greiner dkk. (1995)]

$$U(T, V, \mu) = - \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right|_{z, V} \quad (3.5)$$

Sedangkan panas jenis suatu zat didefinisikan sebagai energi panas yang diperlukan untuk menaikkan suhu satu satuan massa zat naik satu derajat satuan suhu. Pada volume tetap, panas jenis C_V dirumuskan sebagai

$$C_V(T) = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{N, V} \quad (3.6)$$

3.2 Perhitungan Fungsi-fungsi Termodinamika Sistem Statistika Fuzzy (0, 2)

Keunikan statistika fuzzy (p, q) terletak pada sifatnya yang memiliki FPKL ekstensif. Selain itu, statistika ini juga menarik karena keumumannya dalam memerikan dan mengatur perilaku maupun keadaan anggota sistem partikelnya berdasarkan parameter p dan q tertentu.

Perhitungan fungsi-fungsi termodinamika sistem statistika fuzzy $(1, 1)$ telah dilakukan oleh Martell (1999) dan King (1999). Sistem ini berinterpolasi antara sistem Boson dan Fermion. Fungsi-fungsi termodinamika yang mereka temukan menghasilkan suatu sifat termodinamik yang berubah secara kontinum antara Boson dan Fermion.

Sedangkan perhitungan fungsi-fungsi termodinamika sistem statistika fuzzy $(2, 0)$ atau $(0, 2)$, serta penampilannya dalam bentuk grafik, belum pernah dilakukan. Kedua statistika ini sangat menarik. Sebab, kedua statistika ini merupakan statistika yang paling dekat pergeserannya dari sistem statistika Boson dan Fermion. Sistem statistika fuzzy $(2, 0)$, merupakan bentuk sistem statistika yang bergeser (menyimpang) paling ‘dekat’ dari sistem Boson. Sedangkan sistem statistika fuzzy $(0, 2)$, merupakan bentuk sistem statistika yang bertransisi paling ‘dekat’ dari sistem Fermion.

Kajian dalam Tugas Akhir ini hanya meninjau sistem statistika fuzzy $(0, 2)$ agar dapat diketahui bagaimana sebenarnya sifat-sifat termodinamika suatu sistem yang menyimpang sedikit dari sistem Fermi. Sistem statistika fuzzy $(0, 2)$ mengandung arti bahwa ada dua parameter α yang muncul di dalam

tampilan FPKL-nya ketika parameter γ dan β bernilai nol. Sedangkan fungsi partisi kanonik lengkap sistem statistika fuzzy (0,2) ini, dalam m tingkat energi, dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Z(x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m (1 + \alpha_1 x_i)(1 + \alpha_2 x_i) \quad (3.7)$$

dengan $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Cara untuk mendapatkan besaran-besaran termodinamika (seperti rerata jumlah partikel N , entropi S , energi internal U dan panas spesifik C_V) sistem statistika fuzzy (0,2) ini, mirip dengan metodologi penjabaran sifat-sifat termodinamika pada sistem Fermi gas ideal. Untuk itu, penentuan sifat-sifat termodinamika sistem statistika fuzzy (0,2) juga bermula dari logaritma FPKL-nya.

$$q(T, V, z) = \ln Z = \sum_i \ln(1 + \alpha_1 x_i) + \sum_i \ln(1 + \alpha_2 x_i) \quad (3.8)$$

dengan $x_i = z e^{-\beta \epsilon_i}$, sedangkan z adalah fugasitas yang bernilai $e^{\beta \mu}$. Sehingga persamaan tersebut dapat dituliskan kembali menjadi:

$$q(T, V, z) = \ln Z = \sum_i \ln(1 + \alpha_1 z e^{-\beta \epsilon_i}) + \sum_i \ln(1 + \alpha_2 z e^{-\beta \epsilon_i}) \quad (3.9)$$

Dengan mendefenisikan $z_1 \equiv \alpha_1 z$ dan $z_2 \equiv \alpha_2 z$, penyajian $q(T, V, z)$ dapat lebih dipersingkat sehingga bentuknya menyerupai kasus Fermi; akan tetapi di ruas kanan terdiri dari penjumlahan dua suku. Bentuknya adalah sebagai berikut:

$$q(T, V, z) = \ln Z = \sum_i \ln(1 + z_1 e^{-\beta \epsilon_i}) + \sum_i \ln(1 + z_2 e^{-\beta \epsilon_i}) \quad (3.10)$$

Sedangkan rerata jumlah total partikel $N(T, V, z)$ dapat dituliskan berupa:

$$N(T, V, z) = \sum_i \frac{1}{z_1^{-1} e^{-\beta\epsilon_i} + 1} + \sum_i \frac{1}{z_2^{-1} e^{-\beta\epsilon_i} + 1} \quad (3.11)$$

Karena rata-rata energi diperlukan untuk menambah partikel-partikel lain ke dalam sistem, μ juga harus meningkat bersamaan dengan meningkatnya jumlah partikel tersebut di dalam volume yang tetap. Sebab diperlukan suatu state energi yang lebih tinggi untuk setiap penambahan lebih dari satu partikel baru ke dalam sistem. Di sini, semua nilai-nilai μ yang mungkin adalah tidak terbatas.

Sedangkan untuk sistem yang volumenya sangat besar, ketika limit energi kontinum, jumlahan di dalam persamaan (3.10) dan (3.11) dapat diganti dengan pengintegralan untuk seluruh keadaan-keadaan kuantum partikel. Sehingga dapat dituliskan

$$\sum_i \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad (3.12)$$

dengan $k = \frac{p}{\hbar}$.

Rumusan tersebut dapat juga dijabarkan dengan meninjau suatu ruang fase klasik yang partikelnya invarian di bawah aksi permutasi. Interpretasi kuantitas ini

$$\sum = \int \frac{d^3r d^3p}{h^3} = \frac{4\pi V}{h^3} \int p^2 dp = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int \epsilon^{1/2} d\epsilon \quad (3.13)$$

adalah jumlah keadaan-keadaan kuantum partikel yang ada di dalam ruang fase partikel tunggal tersebut (Greiner dkk., 1995).

Kemudian didefinisikan suatu besaran $g(\epsilon)$ yang diinterpretasikan sebagai densitas state-state partikel tunggal.

$$g(\epsilon) = \frac{d \sum}{d\epsilon} = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} \quad (3.14)$$

Dari pengertian di atas, telah dapat disajikan bahwa untuk sistem yang volumenya sangat besar, ketika limit energi kontinum, jumlahan di dalam persamaan (3.10) dan (3.11) dapat diganti dengan pengintegralan untuk seluruh state-state partikel yang ada. Dengan bahasa lain

$$\sum_i \rightarrow \int g(\epsilon) d\epsilon \quad (3.15)$$

Dengan demikian, modifikasi persamaan (3.10) dan (3.11) menjadi bentuk integral dapat dituliskan

$$q(T, V, z) = \ln Z = \int_0^\infty g(\epsilon) d\epsilon \ln(1 + z_1 e^{-\beta\epsilon_i}) + \int_0^\infty g(\epsilon) d\epsilon \ln(1 + z_2 e^{-\beta\epsilon_i}) \quad (3.16)$$

Sedangkan rerata jumlah total partikel $N(T, V, z)$ dapat dituliskan menjadi

$$N(T, V, z) = \int_0^\infty g(\epsilon) d\epsilon \frac{1}{z_1^{-1} e^{-\beta\epsilon_i} + 1} + \int_0^\infty g(\epsilon) d\epsilon \frac{1}{z_2^{-1} e^{-\beta\epsilon_i} + 1} \quad (3.17)$$

Rapat keadaan partikel pada persamaan (3.14) perlu dikalikan dengan suatu faktor g sehingga akan mengakomodasi berbagai perilaku sebarang partikel-partikel tunggal yang berada di dalam energi level yang tergenerasi dengan derajat degenerasi g . Sebagai contoh, untuk kasus elektron, $g = 2s + 1$, dengan s adalah spin partikel. Oleh sebab itu, persamaan (3.14) dapat berbentuk

$$g(\epsilon) = g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} \quad (3.18)$$

Dengan mensubstitusikan nilai $g(\epsilon)$ ke dalam persamaan (3.16) dan (3.17),

dapat diperoleh

$$q(T, V, z) = g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \left[\int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{1/2} \ln(1 + z_1 e^{-\beta\epsilon_i}) + \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{1/2} \ln(1 + z_1 e^{-\beta\epsilon_i}) \right] \quad (3.19)$$

$$q(T, V, z) = g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{2}{3}\beta \left[\int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{z_1^{-1} e^{\beta\epsilon_i} + 1} + \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{z_2^{-1} e^{\beta\epsilon_i} + 1} \right] \quad (3.20)$$

Sedangkan rerata jumlah total partikel $N(T, V, z)$ dapat dituliskan menjadi

$$N(T, V, z) = g \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \left[\int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{z_1^{-1} e^{\beta\epsilon_i} + 1} + \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{z_2^{-1} e^{\beta\epsilon_i} + 1} \right] \quad (3.21)$$

Dengan memisalkan $x = \beta\epsilon$, suku pengintegralan pada persamaan (3.20) dan (3.21) dapat dituliskan dengan memakai fungsi berikut (Greiner dkk., 1995)

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1} e^x + 1}, \quad 0 \leq z \leq \infty \quad (3.22)$$

Sehingga persamaan di atas dapat ditulis:

$$q(T, V, z) = \frac{pV}{kT} = \frac{gV}{\lambda^3} \left[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2) \right], \quad (3.23)$$

dan

$$N(T, V, z) = \frac{gV}{\lambda^3} \left[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2) \right] \quad (3.24)$$

dengan $\lambda = (\frac{h^2}{2\pi mkT})^{1/2}$ yang sering disebut sebagai panjang gelombang termal (*thermal wavelength*).

Adapun sifat-sifat fungsi $f_n(z)$ yang ada pada persamaan (3.22), untuk $z < 1$, dapat dituliskan sebuah ekspansi sebagai berikut:

$$\frac{1}{z^{-1}e^x + 1} = ze^{-x} \frac{1}{1 + ze^{-x}} = ze^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} (-ze^{-x})^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} z^k e^{-kx} \quad (3.25)$$

Apabila ekspansi ini diterapkan pada persamaan (3.22), maka diperoleh bentuk fungsi $f_n(z)$ yang lebih sederhana:

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k^n} \int_0^{\infty} dy y^{n-1} e^{-y} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k^n} \quad (3.26)$$

dimana $y = kx$, dan perhitungan (nilai) fungsi Γ telah dimasukkan ke dalam suku integral.

Sedangkan untuk derivatif fungsi $f_n(z)$, formulanya dapat dituliskan sebagai berikut (Greiner dkk., 1995)

$$\frac{\partial}{\partial z} f_n(z) = \frac{1}{z} f_{n-1}(z) \quad (3.27)$$

di mana persamaan (3.27) ini berlaku umum untuk seluruh nilai z .

Dengan demikian, fungsi-fungsi termodinamika lainnya telah dapat ditentukan dengan mudah. Untuk rerata energi internal sistem dapat diperoleh melalui

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \Big|_{z,V} = kT^2 \frac{gV}{\partial T} \ln Z \Big|_{z,V} = \frac{3}{2} kT \frac{gV}{\lambda^3} [f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2)] \quad (3.28)$$

Menggunakan persamaan (3.24), suku gV/λ^3 dapat dieliminasi; sehingga rerata

energi internal sistem statistika ini disajikan dengan hasil

$$U = \frac{3}{2} NkT \frac{[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2)]}{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]} \quad (3.29)$$

Berbeda dengan rerata energi internal sistem. Panas jenis sistem dapat ditentukan dengan mendiferensialkan energi internal tersebut terhadap temperatur. Untuk dapat menyelesaikannya, perlu digunakan ‘aturan’ derivatif z terhadap T .

Dengan menggunakan persamaan (3.24) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} [f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)] &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{N\lambda^3}{Vg} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial T} \frac{\partial}{\partial z} [f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)] &= -\frac{3}{2T} \left(\frac{N\lambda^3}{Vg} \right) \\ \frac{\partial z}{\partial T} \frac{1}{z} [f_{1/2}(z_1) + f_{1/2}(z_2)] &= -\frac{3}{2T} [f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)] \end{aligned} \quad (3.30)$$

atau

$$\left. \frac{\partial z}{\partial T} \right|_{V,N} = -\frac{3}{2} \frac{z}{T} \frac{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]}{[f_{1/2}(z_1) + f_{1/2}(z_2)]} \quad (3.31)$$

Untuk sistem statistika fuzzy (0, 2) penentuan panas jenisnya mirip dengan metodologi perhitungan panas jenis pada sistem Fermi gas ideal. Hanya saja statistika fuzzy (0, 2) ini melibatkan 2 variabel z yang berbeda¹ —yaitu z_1 dan z_2 — sehingga penyelesaiannya menghasilkan suku yang lebih banyak dibanding sistem Fermi gas ideal.

Melalui persamaan (3.6), (3.27), (3.29) dan (3.31), panas jenis sistem sistem

¹ Variabel z_1 dan z_2 bisa bernilai sama ketika parameter α_1 dan α_2 bernilai 0,5

statistika fuzzy (0, 2) dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$C_V = \frac{3}{2} Nk \frac{[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2)]}{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]} - \frac{9}{4} Nk \frac{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]}{[f_{1/2}(z_1) + f_{1/2}(z_2)]} + \frac{9}{4} Nk \frac{[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2)]}{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]}, \quad (3.32)$$

maka:

$$C_V = \frac{15}{4} Nk \frac{[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2)]}{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]} - \frac{9}{4} Nk \frac{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]}{[f_{1/2}(z_1) + f_{1/2}(z_2)]},$$

atau

$$\frac{C_V}{Nk} = \frac{15}{4} \frac{[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2)]}{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]} - \frac{9}{4} \frac{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]}{[f_{1/2}(z_1) + f_{1/2}(z_2)]} \quad (3.33)$$

Energi bebas suatu sistem didefinisikan oleh $F = U - TS = N\mu - pV$. Dengan menggunakan kaitan $\mu = kT \ln z$ dan p diperoleh melalui persamaan (3.23) dan (3.24), energi bebas sistem statistika fuzzy (0, 2) dengan mudah dapat dihitung, yaitu:

$$F = NkT \ln z - kT \frac{gV}{\lambda^3} [f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2)] \quad (3.34)$$

Begitu pula halnya dengan entropi. Entropi dapat didefinisikan sebagai:

$$S = \frac{1}{T} (U - F). \quad (3.35)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.29) dan (3.34) ke dalam persamaan

(3.35), diperoleh entropi sistem berupa:

$$S = \frac{1}{T} \left[\frac{3}{2} NkT \frac{[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2)]}{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]} + kT \frac{gV}{\lambda^3} [f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2)] - NkT \ln z \right],$$

$$\frac{S}{Nk} = \frac{3}{2} \frac{[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2)]}{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]} + \frac{[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2)]}{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]} - \ln z,$$

sehingga entropi sistem statistika fuzzy (0, 2) tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\frac{S}{Nk} = \frac{5}{2} \frac{[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2)]}{[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2)]} - \ln z \quad (3.36)$$

Selanjutnya, agar mempermudah tampilan grafik fungsi-fungsi termodinamika di atas, perlu diperkenalkan variabel baru. Untuk memperolehnya, ditinjau suatu bentuk panjang gelombang termal (*thermal wavelength*) yang terdefinisi sebagai berikut:

$$\lambda = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m kT} \right)^{1/2} \quad (3.37)$$

serta fugasitas z didefinisikan oleh

$$z = e^{\beta\mu} = e^{\mu/kT} \quad (3.38)$$

Bentuk persamaan (3.37) dan (3.38) di atas dapat dimodifikasi dengan melakukan penyederhanaan sebagai berikut:

$$\mu = \mu' \mu_0 \quad (3.39)$$

dengan μ_0 adalah μ ketika $T \rightarrow 0$, sehingga

$$\mu' = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (3.40)$$

di mana μ' adalah nilai yang tak berdimensi. Kemudian diperkenalkan variabel suhu yang baru T' , dengan meninjau

$$T = a T' \quad (3.41)$$

dengan $a = \frac{\mu_0}{k}$. Dengan demikian, variabel T' merupakan kuantitas yang tak berdimensi, yaitu berupa:

$$T' = \frac{T}{a} \quad (3.42)$$

Bentuk panjang gelombang termal λ pada persamaan (3.37) dapat dimodifikasi melalui penyederhanaan berikut ini:

$$\lambda = \left(\frac{1}{m' T'} \right)^{1/2} \quad (3.43)$$

di mana $m' = \frac{m}{b}$, dengan $b = \frac{2\pi\hbar^2}{\mu_0}$. Besaran m' adalah variabel massa bernilai bebas, namun penyajian grafik yang ditampilkan di dalam Tugas Akhir ini hanya mengambil nilai $m' = 1$.

Dengan demikian persamaan (3.38) dapat dituliskan ke dalam bentuk fugasitas yang baru, yaitu:

$$z = e^{\mu'/T'} \quad (3.44)$$

Dengan bentuk persamaan (3.43) dan (3.44) inilah grafik fungsi-fungsi termodinamika disajikan. Untuk selanjutnya, agar memudahkan penulisan, tanda ' (aksen) dihilangkan. Dengan begitu T , μ dan m selalu dihitung dalam satuan yang telah termodifikasi.

3.3 Perilaku Sistem Statistika Fuzzy $(0, 2)$

Melalui persamaan (3.24), (3.29), (3.33) dan (3.36), sifat-sifat termodinamika sistem ini telah dapat diketahui dengan mengamati berbagai karakteristik grafik fungsinya. Dalam Tugas Akhir ini, grafik-grafik fungsi yang diperoleh berasal dari perhitungan komputasi sederhana dengan menggunakan program *maple 9.5*.

3.3.1 Rerata Jumlah Total Partikel

Dengan menggunakan defenisi persamaan ((3.26)) di atas, perilaku rerata jumlah total partikel sistem statistika fuzzy telah dapat diketahui.

Gambar (A.1) dan (A.2) menunjukkan bahwa rerata total jumlah partikel persatuan volum N/V akan bertambah dengan meningkatnya T . Selain itu, gambar (A.1) juga mengisyaratkan makna bahwa grafik dengan nilai $\alpha_1 = 0,3$ berperilaku sama dengan grafik $\alpha_1 = 0,7$ (warna biru berhimpit dengan warna kuning). Sedangkan grafik $\alpha_1 = 0$ berperilaku sama dengan grafik $\alpha_1 = 1$ untuk nilai μ yang sama. Hal ini terbukti dengan saling berhimpitnya warna garis untuk masing-masing nilai α yang berkesesuaian (warna merah berhimpit dengan warna hitam). Sifat tersebut sebenarnya dapat dimengerti dengan menilik informasi pada syarat awal FPKL statistika ini yang mendefenisikan bahwa $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Rerata total jumlah partikel N/V ini meningkat relatif lebih tinggi pada saat variabel μ bertambah besar, seperti tampak pada gambar (A.2). Semua fungsi $N(T, V, z)$ tersebut ‘bergerak’ dengan transisi kontinum untuk sebarang nilai α_1 dan α_2 , dengan $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Di samping itu, kenaikan rerata total jumlah partikel N , pada sistem statistika fuzzy $(0, 2)$, juga berlaku untuk kenaikan μ . Tampak dari gambar (A.3) yang menunjukkan bahwa kenaikan μ berakibat rerata total jumlah partikel

N semakin besar. Akan tetapi, kenaikan rerata total jumlah partikel N pada sistem statistika fuzzy $(0, 2)$ ini lebih tinggi dibanding dengan sistem Fermi, sebagaimana tampak pada gambar (A.4).

3.3.2 Energi Internal Sistem

Melalui persamaan (3.29), perilaku grafik fungsinya dapat diselidiki. Gambar (A.5) menunjukkan perilaku energi internal sistem statistika fuzzy tersebut. Tampak bahwa kenaikan energi internal sistem berlaku seiring dengan meningkatnya temperatur T . Sifat energi internal seperti ini sering disebut sebagai energi sensibel.

Energi sensibel adalah energi yang berkaitan dengan temperatur zat, semakin tinggi temperatur zat semakin tinggi energi sensibelnya. Akan tetapi, dalam sistem statistika fuzzy $(0, 2)$ ini, kenaikan energi internal sistem ini tidak berlaku untuk seluruh kenaikan interval T . Pada suhu yang relatif rendah, energi internal sistem justru menurun.

Gambar (A.6) memperlihatkan bahwa energi internal sistem menurun pada interval suhu $0 \leq T \leq 0,5$. Interval suhu di mana energi internal sistem ini menurun tergantung pada nilai α_1 dan α_2 tertentu. Selain parameter α_1 dan α_2 , faktor yang mempengaruhi penurunan energi internal sistem —pada interval suhu tertentu— adalah μ . Semakin tinggi nilai μ , interval suhu yang menyebabkan menurunnya energi internal sistem semakin besar. Tingkat kenaikan energi internal sistem statistika fuzzy $(0, 2)$ ini juga naik dengan meningkatnya nilai μ pada temperatur T konstan. Tampak pula bahwa untuk $\alpha_1 = 0, 2$ kenaikan rerata energi internal sistemnya lebih tinggi dibanding $\alpha_1 = 0, 7$.

3.3.3 Panas Jenis Sistem

Panas jenis sistem C_V adalah kemampuan partikel-partikel sistem untuk menyerap atau melepaskan kalor persatuan suhu. Pada gambar (A.10) tampak bahwa, panas jenis sistem C_V/Nk meningkat sangat cepat pada interval suhu $0 \leq T \leq 1$. Akan tetapi, di atas interval suhu tersebut kenaikan panas jenis C_V/Nk sangat pelan, seolah menuju suatu nilai yang konstan. Kondisi seperti ini muncul ketika panas jenis berada pada nilai 1, 4.

Gambar (A.10) juga menunjukkan bahwa harga C_V sistem berubah-ubah besarnya kalau suhunya berubah. Sedangkan pada suhu T yang tetap, panas jenis sistem C_V/Nk mengecil seiring dengan meningkatnya nilai μ . Penurunan nilai panas jenis sistem C_V/Nk ini relatif lebih cepat pada suhu yang lebih rendah, sebagaimana tampak pada gambar (A.11).

Apabila dibandingkan dengan sistem Fermi Gas Ideal, nilai panas jenis C_V statistika fuzzy (0, 2) lebih tinggi. Hal ini mengisyaratkan bahwa sistem partikel statistika fuzzy (0, 2) memiliki kecenderungan lebih lambat panas dibanding sistem Fermi Gas Ideal.

3.3.4 Entropi Sistem

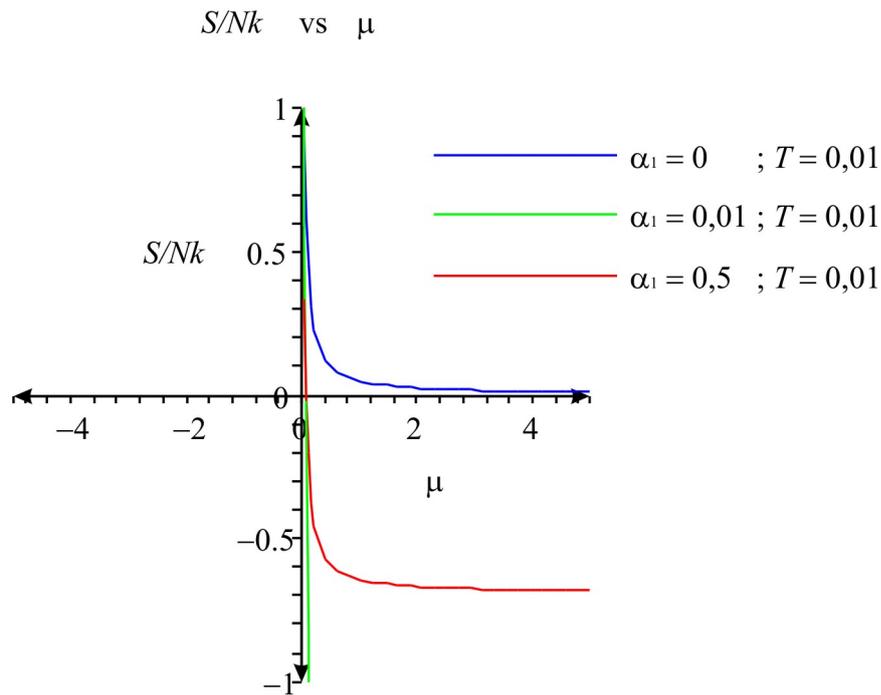
Secara mikroskopis, entropi berkaitan dengan ketidakteraturan. Pada saat entropi minimum hal ini mengandung arti bahwa keadaan tersebut bisa 'ditebak', teratur, kaku dan jelas. Sedangkan semakin tinggi nilai entropinya, ketidakteraturan sistem bertambah tinggi (semakin kacau). Dengan kata lain, entropi yang merupakan besaran ekstensif adalah kuantitas untuk mengukur keacauan (disorder) pada tingkat mikroskopis pada suatu sistem tertentu.

Pada sistem Fermi Gas Ideal, gambar (A.12), kenaikan temperatur mengakibatkan entropi meningkat. Seluruh entropinya bernilai positif. Sedangkan pada suhu yang tetap, nilai entropi sistem S/Nk cenderung lebih menurun

dengan meningkatnya nilai μ seperti tampak pada gambar (A.13) dan nilai entropinya juga positif.

Uniknya pada sistem statistika fuzzy (0, 2), pada suhu tertentu, ada nilai entropi negatif [lihat gambar (A.15)]. Tampak pula bahwa penurunan entropi sistem S/Nk ada yang negatif dengan meningkatnya nilai μ , khususnya pada μ yang tinggi, sebagaimana tampak pada gambar (A.13).

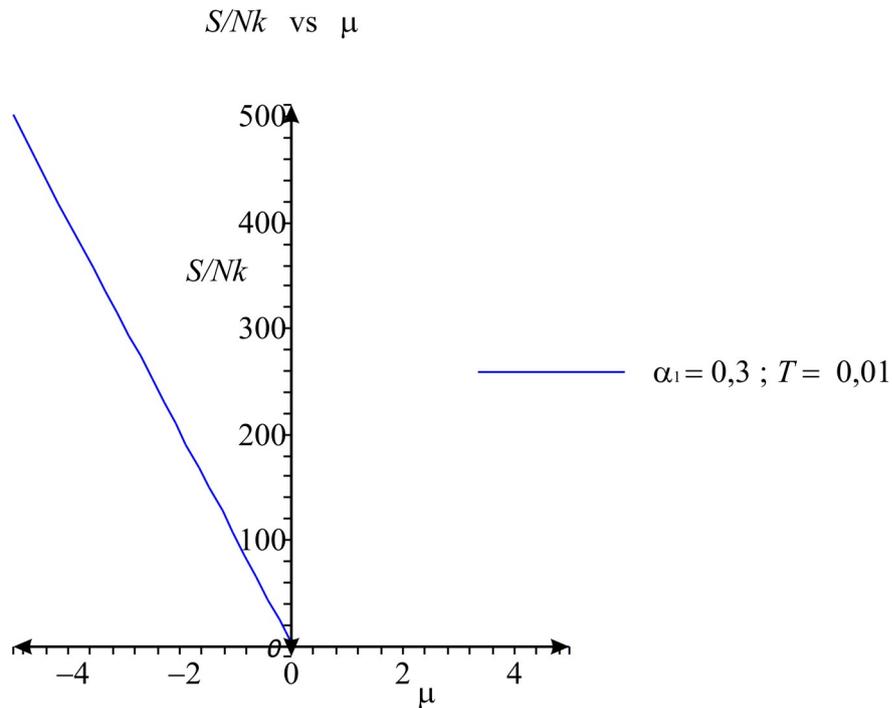
Fenomena tersebut tidak boleh terjadi karena tidak sesuai dengan postulat mekanika statistik yang mengatakan bahwa pada suhu nol mutlak, entropi suatu sistem harus bernilai (mendekati) nol. Oleh karena itu, perlu ditentukan batasan agar diketahui berapa nilai μ yang memenuhi agar entropi sistem ini bernilai positif.



Gambar 3.1

Grafik S/Nk versus μ

Gambar (A.15) memperlihatkan bahwa entropi sistem statistika fuzzy (0, 2) bernilai negatif pada suhu yang rendah. Untuk itu, perlu diselidiki batasan nilai



Gambar 3.2

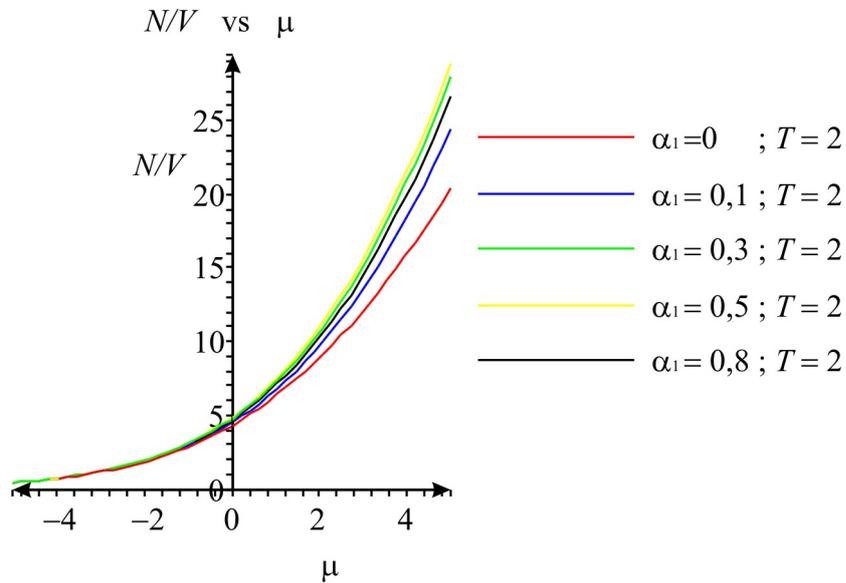
Grafik S/Nk versus μ

μ yang memenuhi pada suhu rendah ini sehingga akan diperoleh entropi sistem yang positif. Dalam hal ini, μ diselidiki pada $T \rightarrow 0$.

Gambar (3.2) menunjukkan bahwa entropi sistem statistika fuzzy (0, 2) ini bernilai positif hanya untuk $\mu \leq 0$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa sistem statistika fuzzy (0, 2) ‘bekerja’ hanya pada wilayah $\mu \leq 0$ saja. Syarat seperti ini mirip dengan syarat sistem Boson. Bedanya, syarat $\mu \leq 0$ pada sistem Boson diperoleh dari persyaratan bahwa rerata jumlah total partikel N tidak boleh negatif. Sedangkan pada sistem statistika fuzzy (0, 2) ini, batasan $\mu \leq 0$ diperoleh dari sifat bahwa entropi sistem tidak boleh negatif pada suhu nol mutlak.

Berdasarkan syarat $\mu \leq 0$, perlu diselidiki kembali perilaku fungsi-fungsi termodinamika yang pada pembahasan sebelumnya syarat ini tidak ditinjau. Fungsi rerata jumlah total partikel N versus temperatur T , patut diselidiki

perilakunya pada wilayah $\mu \leq 0$. Begitu pula halnya dengan entropi S , energi internal U dan panas jenis C_V .



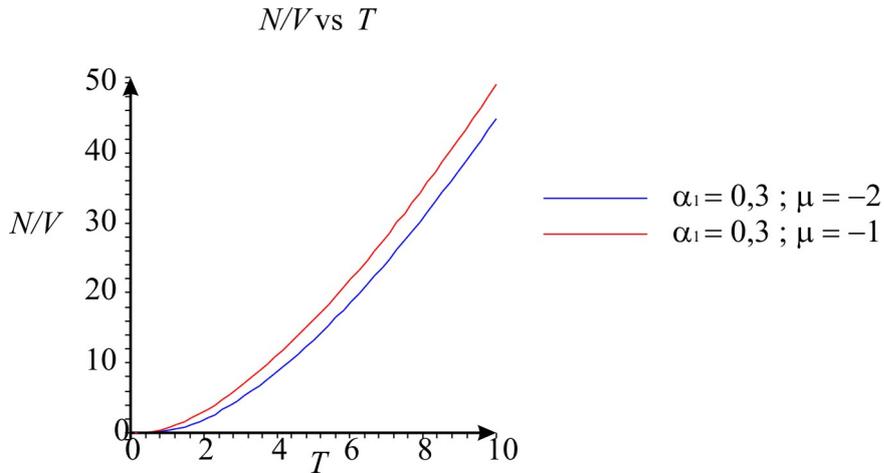
Gambar 3.3

Grafik N/V versus μ

Gambar (3.4) menunjukkan bahwa, pada kondisi $\mu \leq 0$, rerata total jumlah partikel persatuan volum N/V juga akan bertambah dengan meningkatnya T , seperti pada gambar (A.2). Tampak pula bahwa rerata jumlah partikel N semakin kecil dengan semakin kecilnya nilai μ . Ini merupakan indikasi bahwa sistem ini cenderung untuk menyerap partikel.

Gambar (3.6), dengan $\mu \leq 0$, memperlihatkan adanya perbedaan karakteristik $U/N\mu_0$ dibanding grafik $U/N\mu_0$ sebelumnya [gambar (A.6)]. Pada gambar (A.6) tampak adanya penurunan nilai $U/N\mu_0$ —untuk $\mu > 0$ — pada interval suhu tertentu. Sedangkan pada wilayah $\mu \leq 0$, seluruh nilai $U/N\mu_0$ positif dan meningkat secara linear seiring dengan meningkatnya temperatur T . Dengan demikian telah dapat dipastikan bahwa keanehan seperti yang terlihat pada gambar (A.6), tidak muncul lagi pada cakupan $\mu \leq 0$.

Pada gambar (3.5) terlihat bahwa energi internal $U/N\mu_0$ akan mengalami



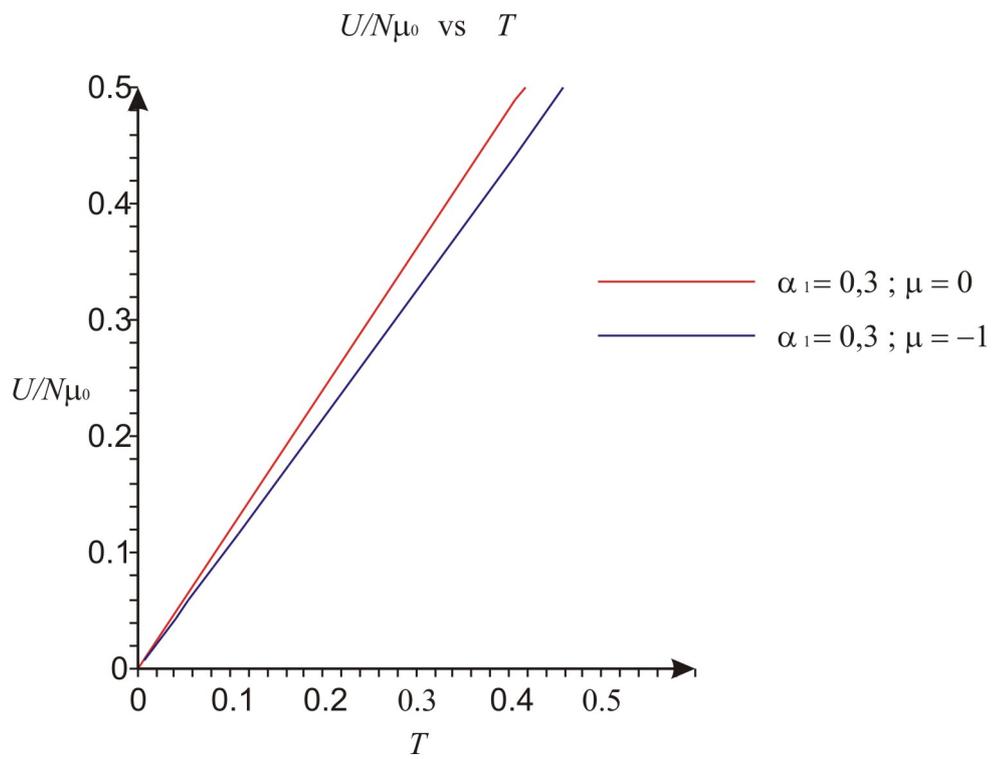
Gambar 3.4

Grafik N/V versus T , dengan $\mu \leq 0$

kenaikan dengan naiknya μ . Hal ini menunjukkan bahwa sistem ini cenderung menambah jumlah partikel ke dalam sistem. Kenaikan suhu menyebabkan partikel-partikel yang berada pada suatu aras tenaga akan berfluktuasi sehingga menyebabkan energi internal akan semakin besar.

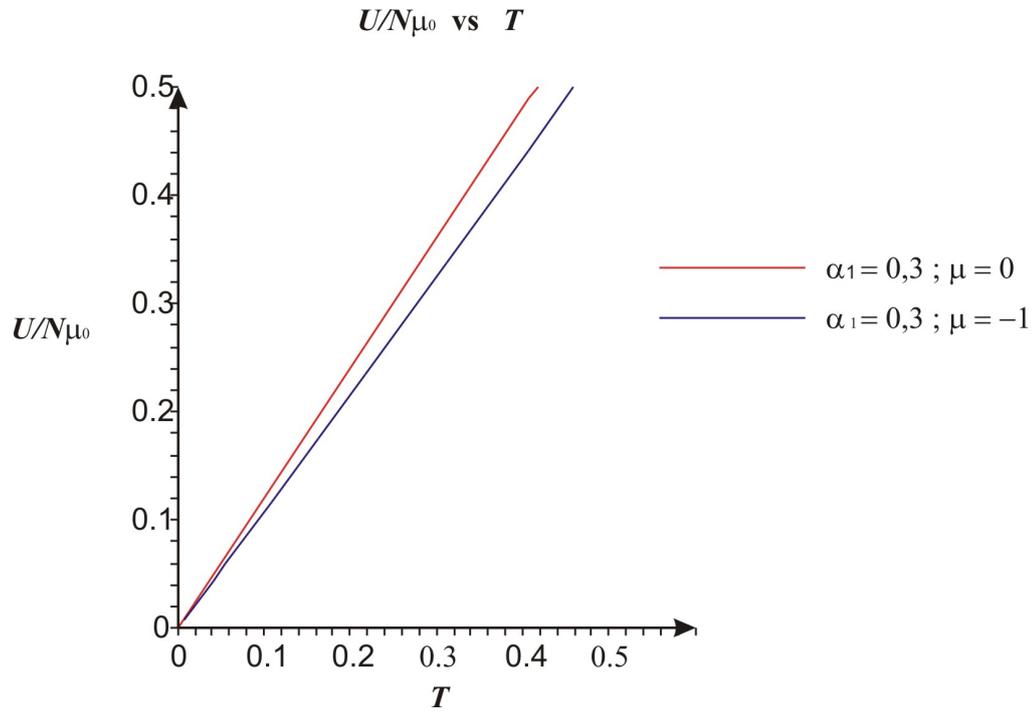
Grafik panas jenis sistem pada gambar (A.10) memperlihatkan hubungan panas jenis dengan temperatur T . Tampak bahwa panas jenis sistem C_V/Nk akan meningkat dengan meningkatnya suhu T . Akan tetapi, grafik panas jenis sistem statistika fuzzy $(0, 2)$ untuk $\mu \leq 0$, menunjukkan hal sebaliknya. Grafik panas jenis sistem C_V/Nk pada gambar (3.7) menyajikan hal yang unik. Pada interval suhu yang rendah, panas jenis sistem tetap, kemudian nilai C_V/Nk meningkat drastis dan pada akhirnya nilai C_V/Nk menurun asimtotik dengan bertambahnya suhu.

Sifat entropi sistem statistika fuzzy $(0, 2)$ ini juga menarik. Gambar (3.8) memperlihatkan bahwa entropi sistem justru menurun dengan bertambahnya suhu. Ini merupakan sebuah keunikan di mana suatu sistem partikel bertambah keteraturannya ketika suhu dinaikkan?



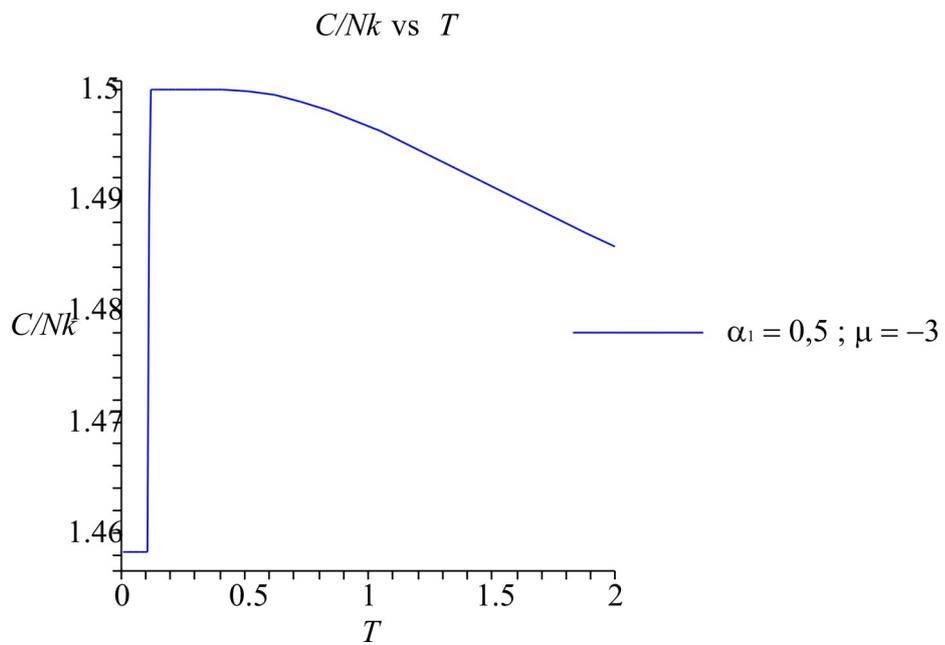
Gambar 3.5

Grafik $U/N\mu_0$ versus T dengan μ berbeda



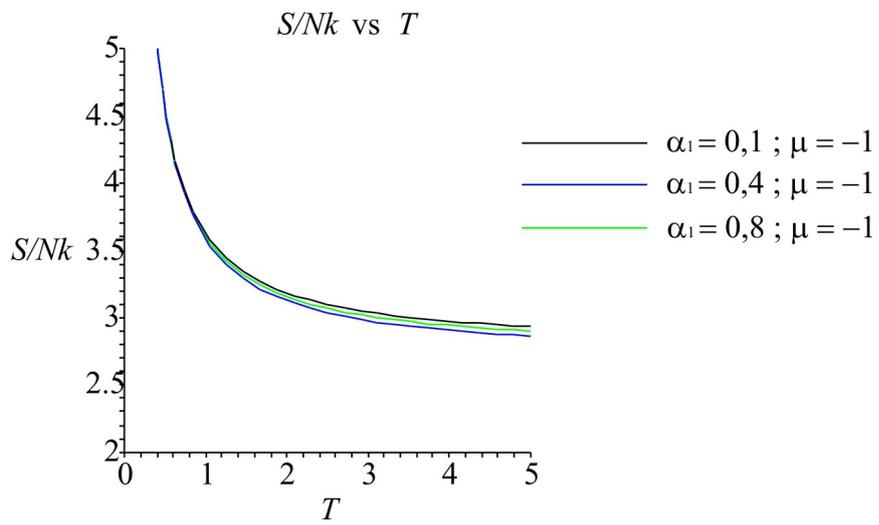
Gambar 3.6

Grafik $U/N\mu_0$ versus T



Gambar 3.7

Grafik C_V/Nk versus T



Gambar 3.8
Grafik S/Nk versus T

Bab IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Sistem statistika fuzzy (0, 2) yang ditinjau perilaku termodinamikanya telah diketahui melalui berbagai grafik fungsi kuantitas ekstensifnya. Dari hasil dan pembahasan, diperoleh beberapa kesimpulan:

1. Besaran-besaran termodinamika sederhana sistem statistika fuzzy (0, 2) seperti jumlah rerata partikel N , rerata energi internal U , panas jenis C_V dan entropi S adalah:

$$\text{a) } N(T, V, z) = \frac{gV}{\lambda^3} \left[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2) \right];$$

$$\text{b) } U = \frac{3}{2} NkT \frac{\left[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2) \right]}{\left[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2) \right]};$$

$$\text{c) } \frac{C_V}{Nk} = \frac{15}{4} \frac{\left[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2) \right]}{\left[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2) \right]} - \frac{9}{4} \frac{\left[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2) \right]}{\left[f_{1/2}(z_1) + f_{1/2}(z_2) \right]};$$

$$\text{d) } \frac{S}{Nk} = \frac{5}{2} \frac{\left[f_{5/2}(z_1) + f_{5/2}(z_2) \right]}{\left[f_{3/2}(z_1) + f_{3/2}(z_2) \right]} - \ln z.$$

2. Sistem statistika fuzzy (0, 2) berlaku pada wilayah $\mu \leq 0$. Syarat seperti ini mirip dengan syarat sistem Boson. Bedanya, syarat $\mu \leq 0$ pada sistem

Boson diperoleh dari persyaratan bahwa rerata jumlah total partikel N tidak boleh negatif. Sedangkan pada sistem statistika fuzzy $(0, 2)$ ini, batasan $\mu \leq 0$ diperoleh dari sifat bahwa entropi sistem tidak boleh negatif pada suhu nol mutlak.

3. Sistem statistika fuzzy $(0, 2)$ memiliki kecenderungan untuk menyerap partikel.
4. Menurunnya nilai $U/N\mu_0$ pada kenaikan interval suhu tertentu tidak terjadi pada syarat $\mu \leq 0$. Akan tetapi pada daerah $\mu > 0$, ada daerah di mana kenaikan interval suhu tertentu mengakibatkan nilai $U/N\mu_0$ turun.
5. Perilaku panas jenis yang tiba-tiba naik dan adanya penurunan entropi dengan penambahan suhu merupakan hal-hal aneh yang ditemukan. Sampai saat ini, kami belum mengetahui alasan penyebabnya.

4.2 Saran

1. Dalam menganalisa sistem statistika fuzzy $(0, 2)$ ini, perlu dilakukan kajian yang melibatkan sistem yang lebih realistis, misalnya sistem yang partikelnya berada pada potensial tertentu.
2. Perlu dilakukan penelitian serupa untuk sistem statistika fuzzy $(2, 0)$.

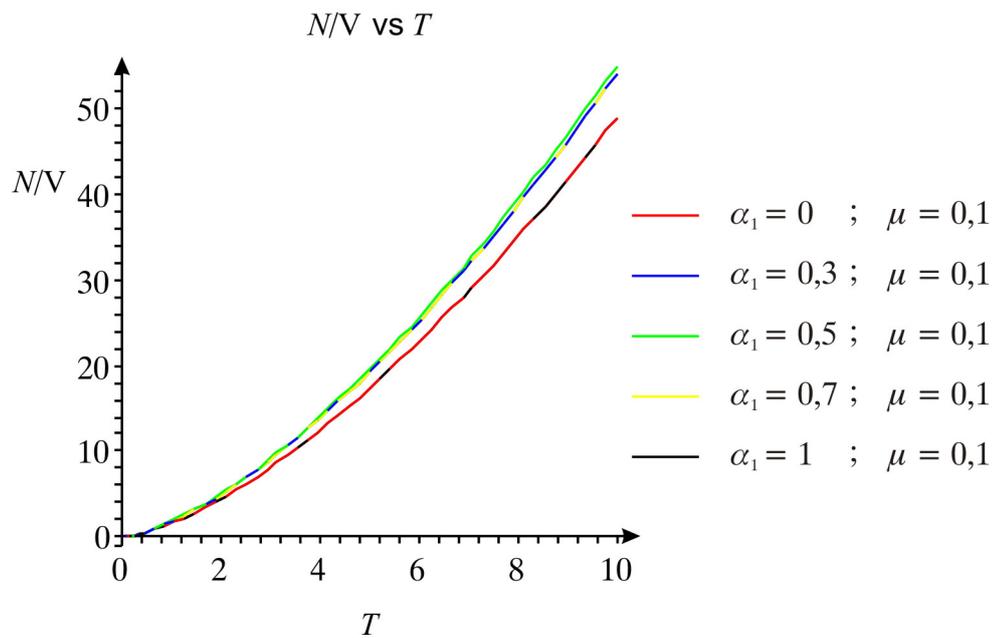
DAFTAR PUSTAKA

- Chaturvedi, S. dan V. Srinivasan, 1997, Grand Canonical Partition Functions for Multi Level Parafermi Systems of Any Order, *Phys. Lett. A-224*, 249-252, hal. 249–252
- Fulton, W., 1991, *Young Tableaux*, Cambridge Univ. Press, New York
- Greenberg, O.W., 1993, Quons, an Interpolation Between Bose and Fermi Oscillator, *arXiv:cond-mat*, vol. 301002v1
- Greiner, W., L. Neise, dan H. Stocker, 1995, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, New York
- Hartle, J.B., R.H. Stolt, dan J.R. Taylor, 1970, Paraparticles of Infinite Order, *Phys. Rev.*, vol. D-2, hal. 1759–1761
- Huang, K., 1965, *Statistical Mechanics*, John Wiley and Sons, New York
- King, B.A., 1999, Inside Matters, *PhD Thesis*, University of Illinois at Chicago, Chicago
- Martell, E.C., 1999, Internal Affairs, *PhD Thesis*, University of Illinois at Chicago, Chicago
- Meljanac, S., M.Stojic, dan D. Svrtan, 1996, Partition Functions for General Multi-level Systems, *RBI-TH-06-96*
- Mishra, A.K. dan G. Rajasekaran, 1995, *Generalized Fock Spaces, New Forms of Quantum Statistics and Their Algebras*, Pramana
- Polychronakos, A.P., 1996, Path Integral and Parastatistics, *Nucl. Phys. B-474*, 529-539
- Satriawan, M., 2002, Generalized Parastatistical Systems, *PhD Thesis*, University of Illinois at Chicago, Chicago
- Sears, F.W. dan G.L. Sallinger, 1975, *Thermodynamics, Kinetic Theory, and Statistical Thermodynamics*, Addison-Wesley, Massachusetts

LAMPIRAN

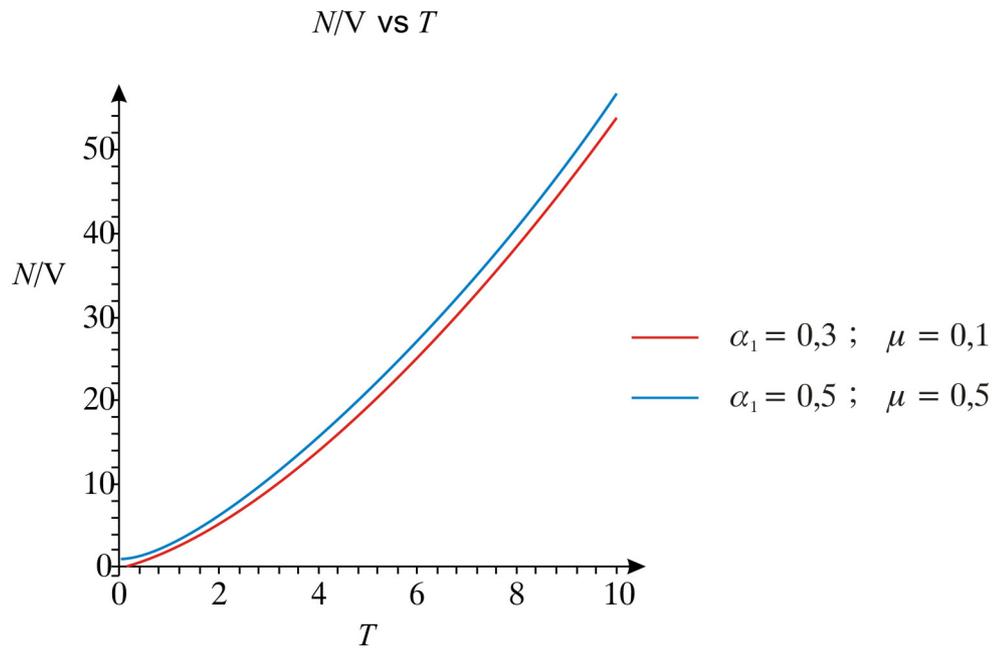
A Grafik Fungsi-fungsi Termodinamika

Berikut tampilan grafik fungsi-fungsi termodinamika yang dibahas dalam Tugas Akhir ini.



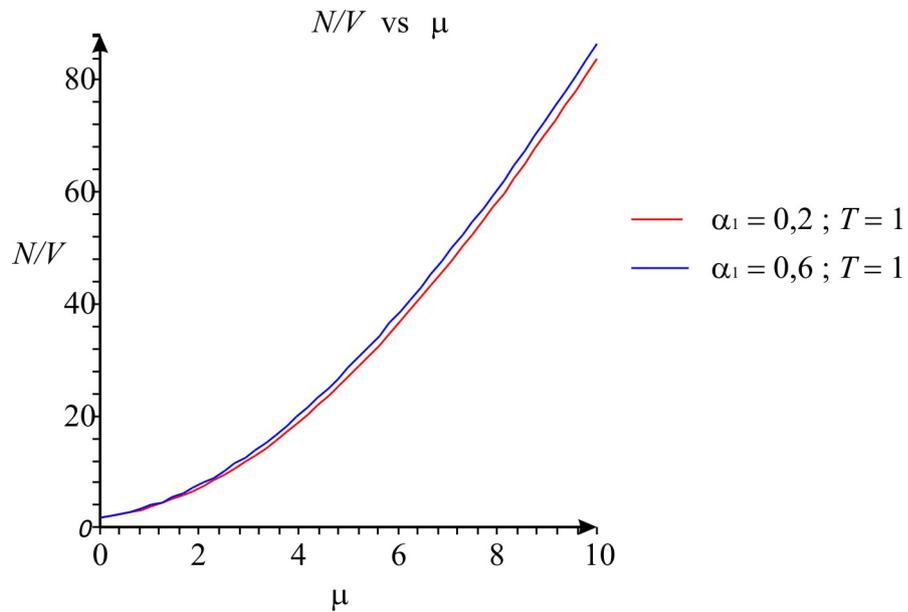
Gambar A.1

Grafik N/V versus T ; μ tetap



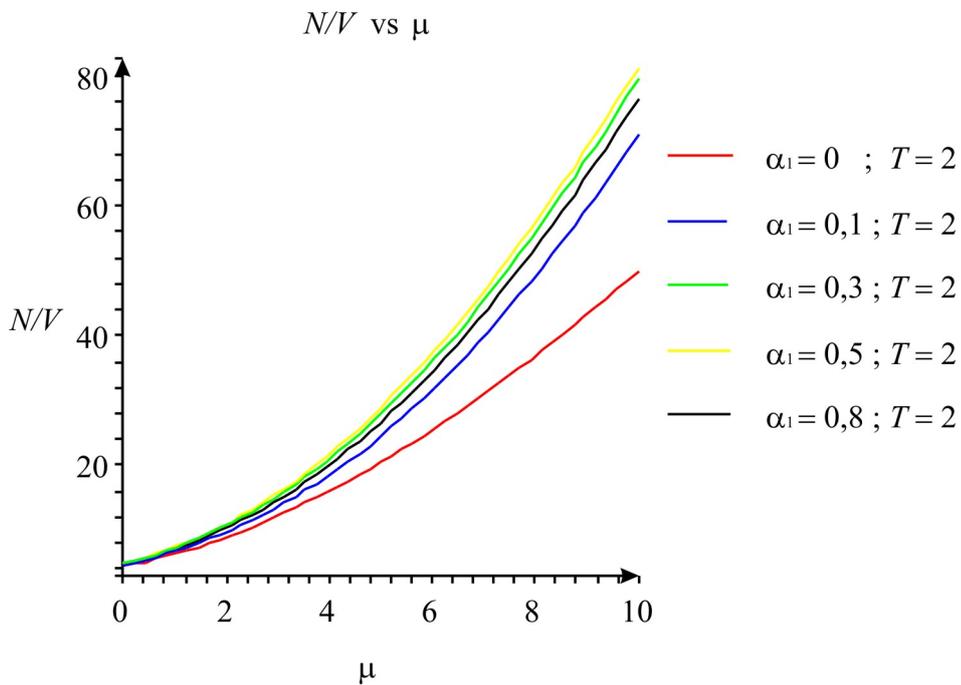
Gambar A.2

Grafik N/V versus T ; dengan variabel μ berbeda



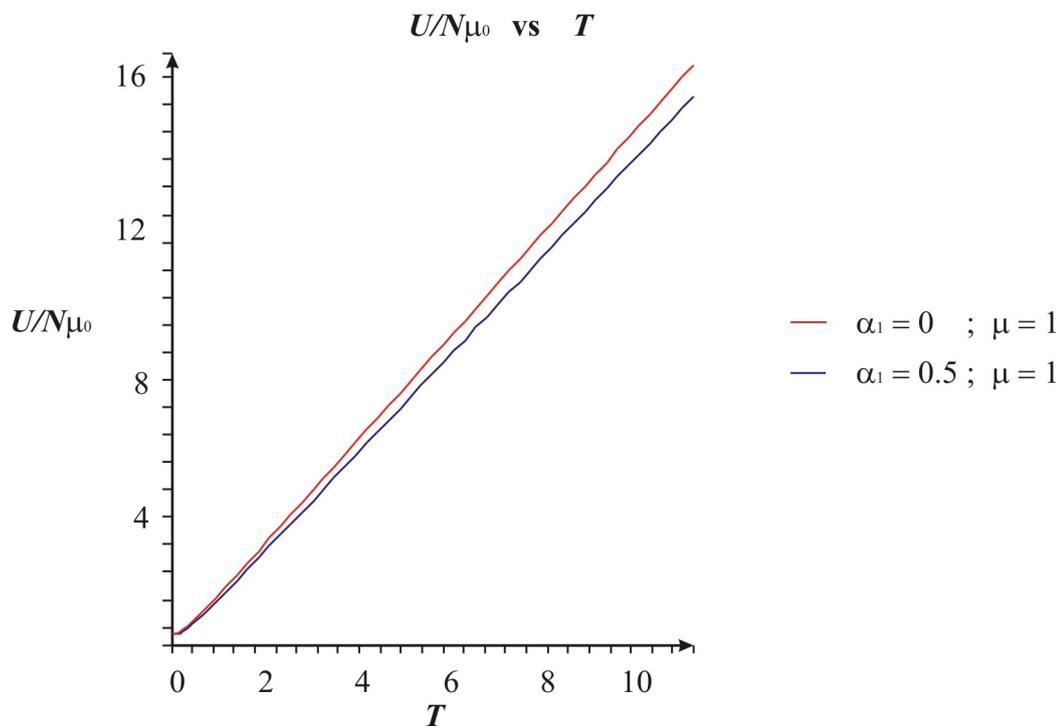
Gambar A.3

Grafik N/V versus μ



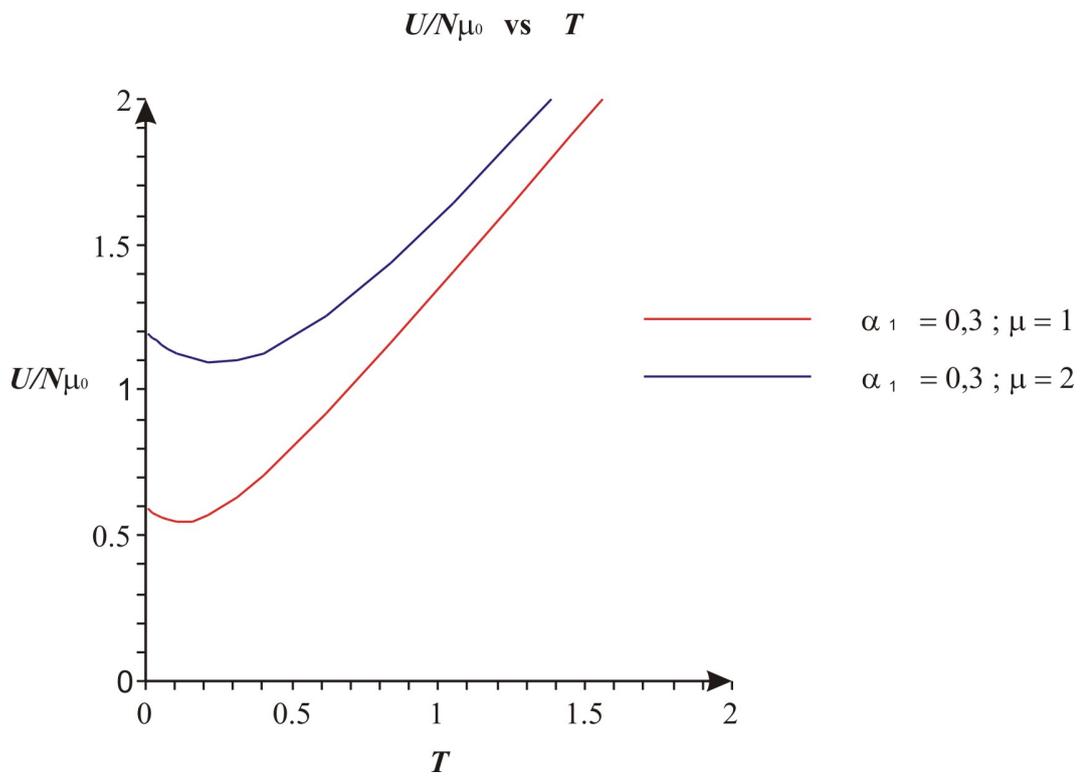
Gambar A.4

Grafik N/V versus μ , T tetap

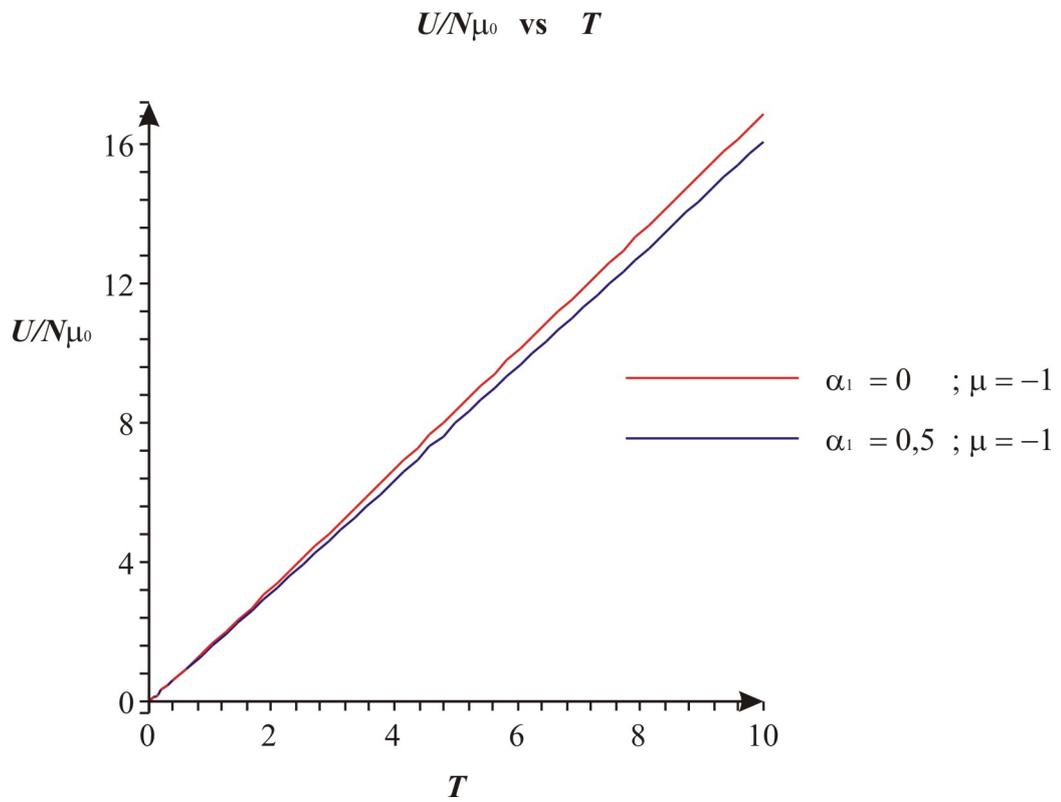


Gambar A.5

Grafik $U/N\mu_0$ versus T , μ tetap

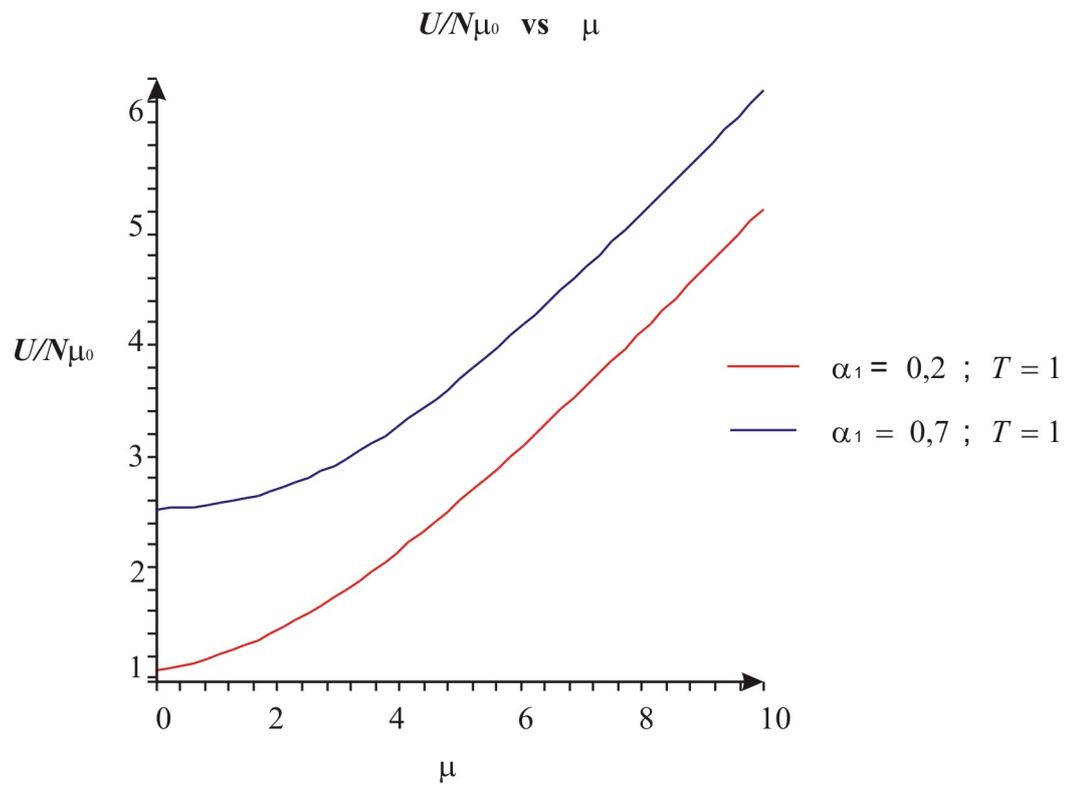


Gambar A.6
Grafik $U/N\mu_0$ versus T , μ berbeda

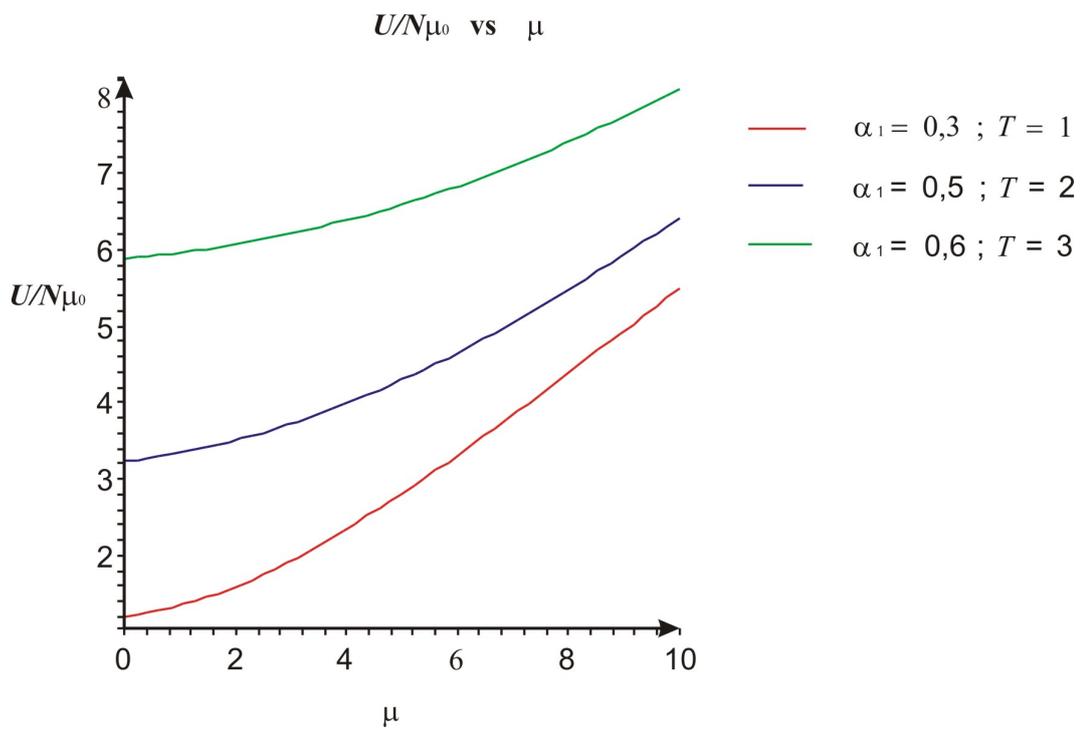


Gambar A.7

Grafik $U/N\mu_0$ versus T , $\mu \leq 0$

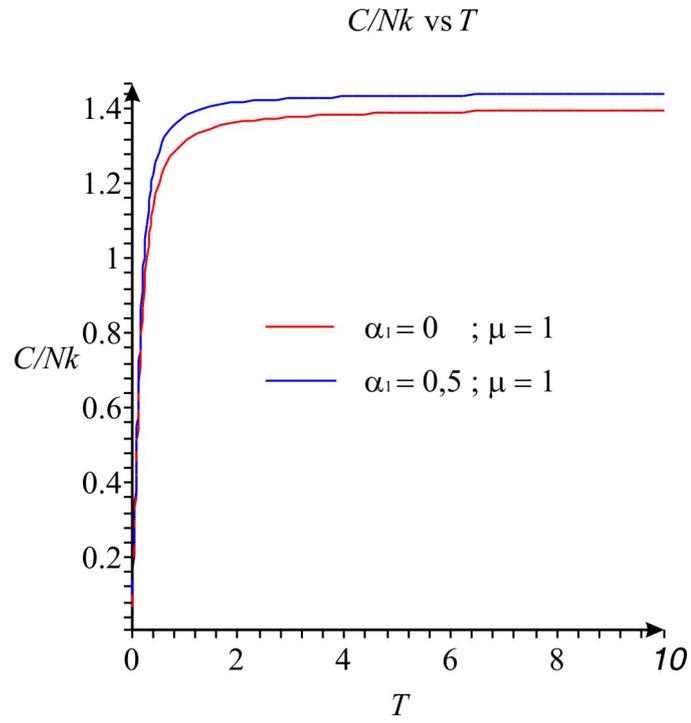


Gambar A.8
Grafik $U/N\mu_0$ versus μ , T tetap

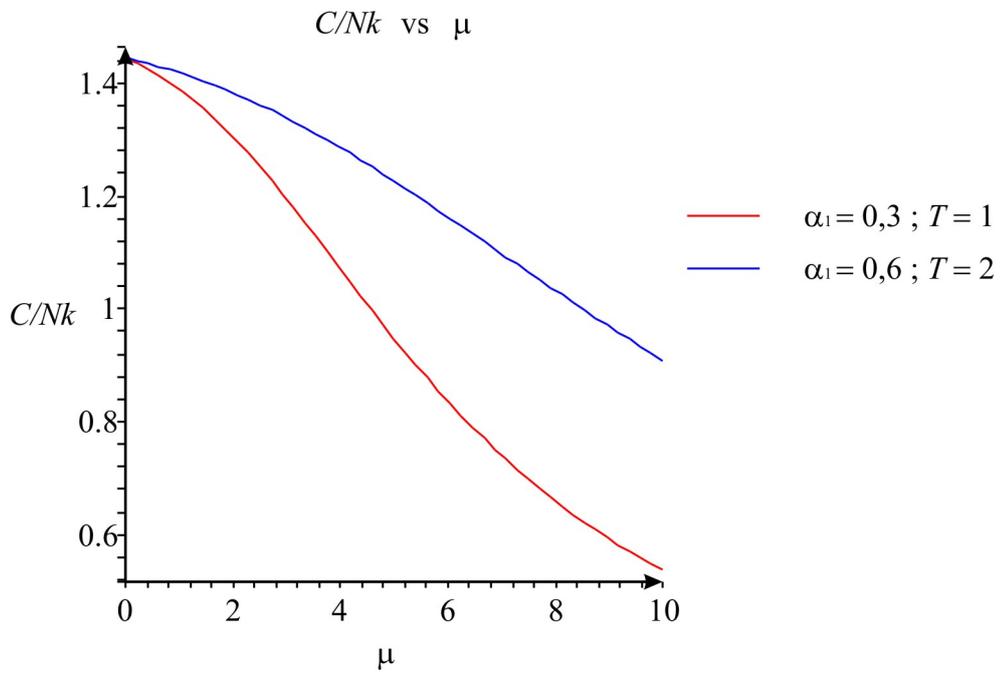


Gambar A.9

Grafik $U/N\mu_0$ versus μ

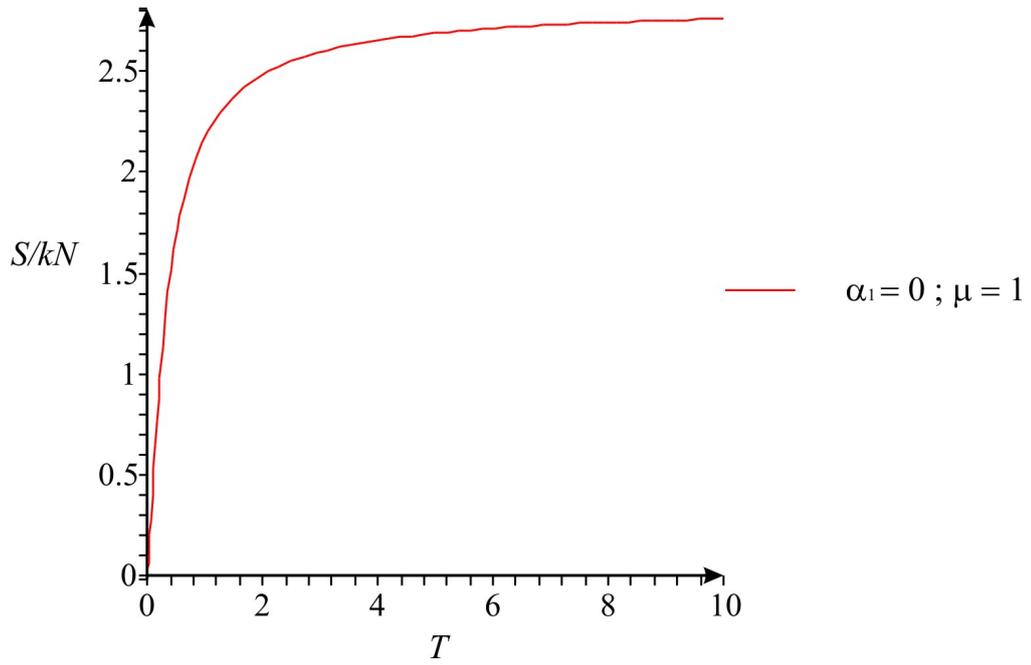


Gambar A.10
Grafik C_V/Nk versus T



Gambar A.11
Grafik C_V/Nk versus μ

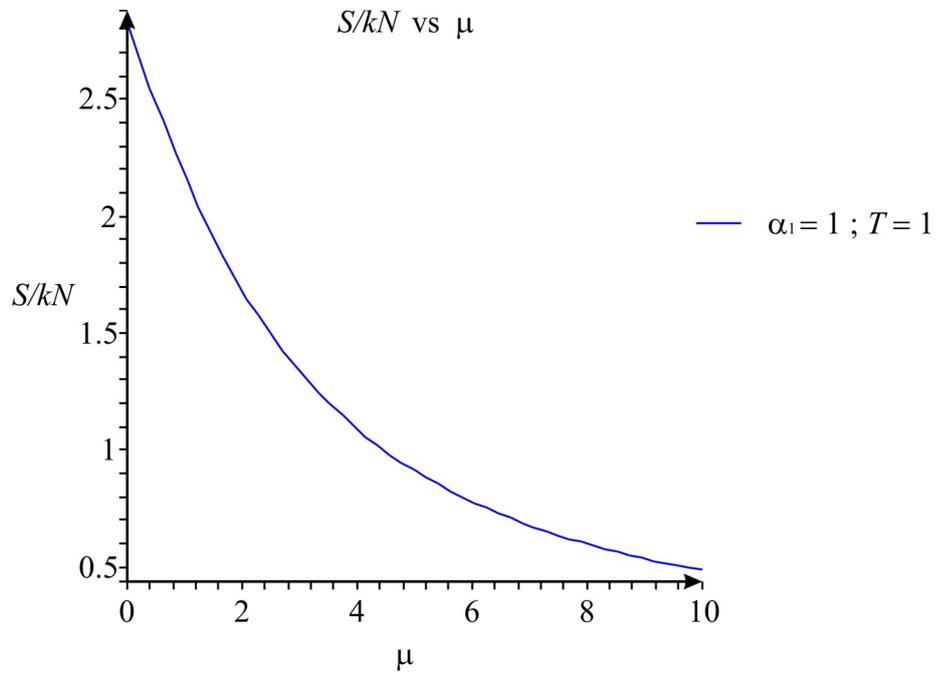
S/kN vs T



Gambar A.12

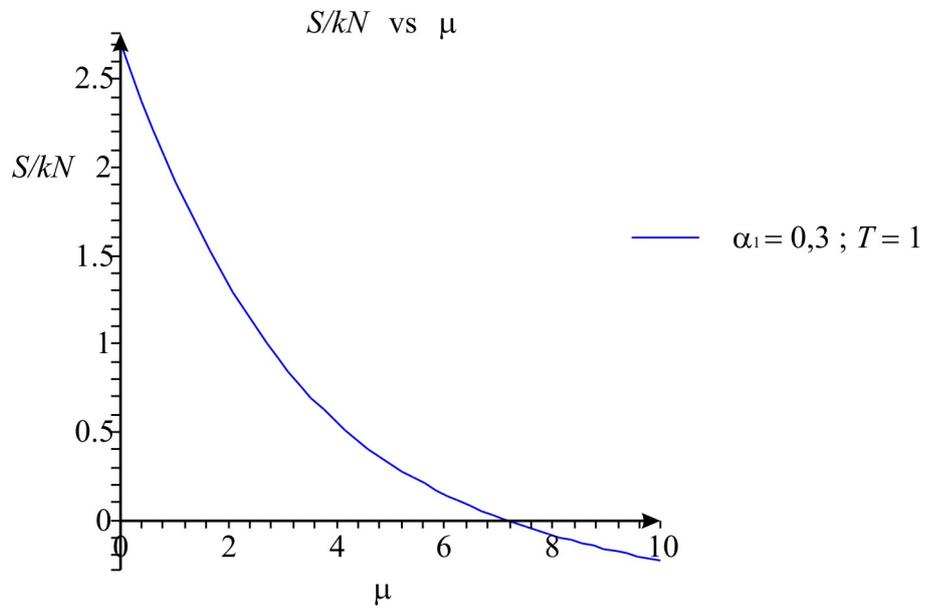
Grafik S/Nk versus T

S/kN vs μ

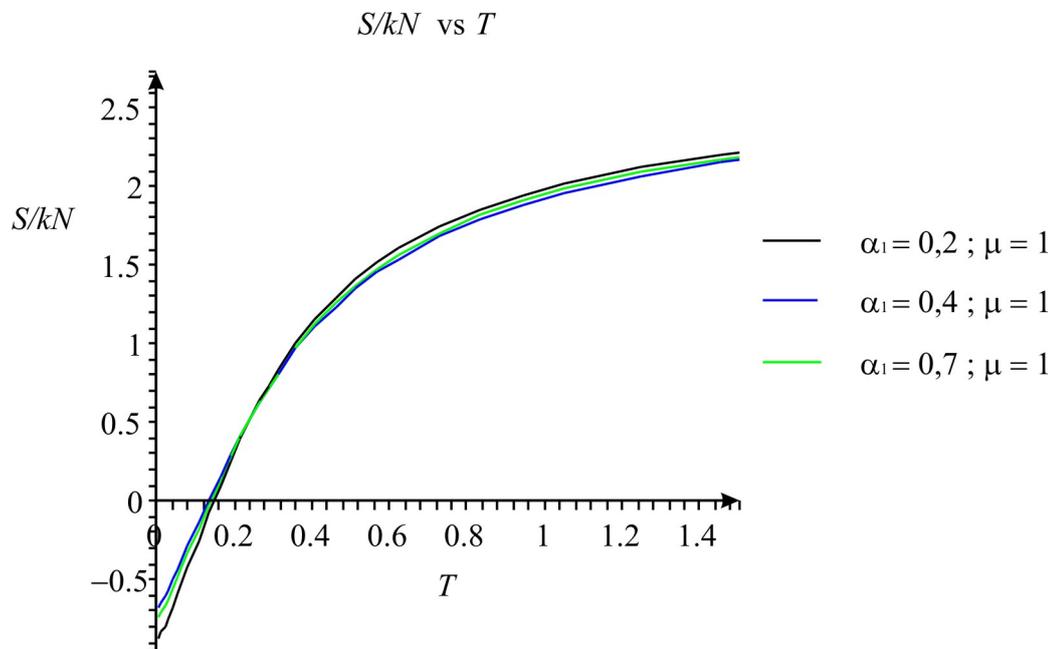


Gambar A.13

Grafik S/Nk versus T



Gambar A.14
Grafik S/Nk versus T



Gambar A.15
Grafik S/Nk versus T